D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis I — HS 2017

Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 13

Hinweise

1. Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und dann eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (siehe Abschnitt 7.5.4 des Skripts).

2. Führen Sie jeweils eine Partialbruchzerlegung durch (siehe Abschnitt 8.2.3).

3. Ist $y'' \in C^l(I)$, so folgt $y \in C^{l+2}(I)$. Verwenden Sie diese Bemerkung um induktiv zu zeigen, dass $y \in C^j(I)$ für $1 \leq j \leq k+2$.

4. Die rechte Seite der zu zeigenden Ungleichung ohne den Faktor $y(a)$ löst die Differentialgleichung $z' = f(x)z$ und erfüllt $z(a) = 1$. Leiten Sie nun den Quotienten y/z ab.

5. Wenden Sie für $n \in \mathbb{N}$ den Mittelwertsatz auf die Summanden der Teleskopsumme

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(f\Big(a + \frac{k(b-a)}{n}\Big) - f\Big(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\Big) \right)$$

an, um Riemann-Summen für f' zu erhalten.

6. Verwenden Sie in a) die Gleichung $\log(n+1) - \log(n) = \int_n^{n+1} 1/x \,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$ um zu zeigen, dass die betrachtete Folge in $[0,1]$ liegt und monoton fallend ist. Beweisen Sie in b), dass

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die nach dieser Aufteilung erhaltenen Integrale lassen sich konkret berechnen.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Nach Korollar 8.3 und Lemma 7.60 löst[1] die Funktion

$$z\colon I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

die Differentialgleichung $z' = f(x)z$. Da ausserdem $z(x) > 0$ für jedes $x \in I$ gilt, ist der Quotient y/z eine differenzierbare Funktion auf I. Ableiten ergibt für $x \in I$

$$\left(\frac{y}{z}\right)'(x) = \frac{y'(x)z(x) - y(x)z'(x)}{z(x)^2} = \frac{y'(x) - f(x)y(x)}{z(x)} \leq 0$$

unter Verwendung der Voraussetzung an y und $z > 0$. Die Funktion y/z ist also monoton fallend. Wegen $y(a)/z(a) = y(a)$ folgt hieraus die behauptete Ungleichung.

5. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n}\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) - f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)\right). \tag{1}$$

Nach dem Mittelwertsatz (Theorem 7.29) existieren $\xi_k^{(n)} \in \left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}, a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ $(1 \leq k \leq n)$ mit

$$f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) - f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n} f'(\xi_k^{(n)}).$$

In (1) eingesetzt ergibt dies

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f'(\xi_k^{(n)}), \tag{2}$$

also genau die Riemann-Summe $R(f', \mathfrak{Z}_n, \mathbf{z}_n)$ für die Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_n = \left\{a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{(n-1)(b-a)}{n} < b\right\},$$

[1] Strenggenommen ist in Korollar 8.3 ein kompaktes Definitionsintervall vorausgesetzt. Die Aussage, dass für stetiges $f \in C(I)$ und $a \in I$ die Funktion $I \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f ist, gilt jedoch für beliebige Intervalle I (vgl. auch MC-Aufgabe 4(b)).

Siehe nächstes Blatt!

welche $|\mathfrak{Z}_n| = (b-a)/n \to 0$ für $n \to \infty$ erfüllt, und die Wahl der Zwischenpunkte

$$\mathbf{z}_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}).$$

Da f' als Riemann-integrierbar vorausgesetzt ist, folgt aus Satz 5.79 über die Konvergenz von Riemann-Summen, dass die rechte Seite von (2) für $n \to \infty$ gegen $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Da diese rechte Seite unabhängig von n gleich $f(b) - f(a)$ ist, schliessen wir hieraus

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. **a)** Es sei

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$$

die Folge aus der Aufgabenstellung. Nach Beispiel 7.15 ist der Logarithmus auf $(0,\infty)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto 1/x$. Somit gilt nach Korollar 8.4 für $n \in \mathbb{N}$

$$\log(n+1) - \log(n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Daraus folgt

$$a_n - a_{n+1} = \log(n+1) - \log(n) - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}\Big)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

da $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ für $x \in [n, n+1]$ gilt. Die Folge $(a_n)_n$ ist also monoton fallend. Wegen

$$1 = a_1 \geq a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

ist die Folge $(a_n)_n$ ausserdem in $[0,1]$ enthalten. Aus dem Satz über die Konvergenz monotoner Folgen (Satz 5.34) erhalten wir also die Konvergenz von $(a_n)_n$ und dass der Grenzwert $\gamma = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ in $[0,1]$ liegt.

b) Riemann-Integrierbarkeit von f wurde in Aufgabe 6 der Serie 7 bewiesen. Der Schlüssel zur Berechnung von $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ist die Beobachtung, dass für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \big(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\big]$ die einfache Formel

$$f(x) = \frac{1}{x} - k$$

Bitte wenden!

gilt, sodass wir für das Integral von f über $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$

$$\begin{aligned}\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)\,\mathrm{d}x &= \log\Big(\frac{1}{k}\Big) - \log\Big(\frac{1}{k+1}\Big) - k\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big)\\ &= \log(k+1) - \log(k) - \frac{1}{k+1} \qquad (3)\end{aligned}$$

erhalten. Nun ist die Vermutung naheliegend, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ mit der Summe all dieser Teilintegrale übereinstimmt. Nehmen wir dies zunächst als gegeben hin, so folgt aus (3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\log(k+1) - \log(k) - \frac{1}{k+1}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\log(k+1) - \log(k) - \frac{1}{k+1}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\log(n+1) - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right)\\ &= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right)\\ &= 1 - \gamma.\end{aligned}$$

Es bleibt die erste Gleichheit in obiger Rechnung zu begründen. Diese folgt wegen $|f| \leq 1$ jedoch sofort aus

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{1/(n+1)} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \int_0^{1/(n+1)} |f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{1}{n+1} \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, wobei wir Intervalladditivität (Satz 4.26) und die Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral (Satz 4.24(iii)) verwendet haben.