Serie 1

Aufgabe 1

Eine Symmetrie einer Figur $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ist per Definition eine Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi(F) = F$ gilt.

Betrachten Sie das gleichschenklige Dreieck Δ mit den Eckpunkten $A = (-1,-1)$, $B = (1,-1)$ und $C = (0,1)$ innerhalb von $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der y-Achse. Ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{cases} s(x) & x \in \Delta \\ x & x \notin \Delta \end{cases}$$

eine Symmetrie von Δ gemäß der oben stehenden Definition?

Aufgabe 2

(a) Drucken Sie ein Ausschneide-Muster[1] des Dodekaeders, montieren Sie es und bringen Sie es in die Uebungsstunde mit.

(b) Bestimmen Sie alle Spiegelungsebenen des Würfels und des Dodekaeders.

Aufgabe 3

Ein metrischer Raum ist per Definition ein Tupel (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to [0,\infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall x, y \in X : \ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$,

(ii) $\forall x, y \in X : \ d(x,y) = d(y,x)$, *and*

(iii) $\forall x, y, z \in X : \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Eine Isometrie zwischen metrischen Räumen (X, d) und (X', d') ist per Definition eine bijektive Abbildung $\varphi : X \to X'$, sodass für alle $x, y \in X$ gilt: $d'(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$.

Betrachten Sie die Menge $P := \{A, B, C, X\}$. Gegeben sind die Werte

$$d(A,B) = d(B,C) = d(A,C) = 1,\ d(A,X) = d(B,X) = d(C,X) = \frac{1}{2}.$$

(a) Erweitern Sie d zu einer Abbildung $d : P \times P \to [0,\infty)$, sodass (P, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Wie viele Isometrien gibt es zwischen (P, d) und sich selbst?

(c) Es sei d_{eukl} die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine vierelementige Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Isometrie zwischen (P, d) und $(Q, d_{\text{eukl}}|_{Q\times Q})$?

[1] z.B. wie im Anhang.