

Serie 2

Aufgabe 1

Es sei $\Gamma = \{\text{id}, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ die Symmetriegruppe des regulären Dreiecks.

- (i) Fertigen Sie eine Multiplikationstafel für Γ an.
- (ii) Folgern Sie aus Teil (i), dass Γ abgeschlossen bezüglich Hintereinanderschaltung ist (Behauptung 1 der Vorlesung).
- (iii) Verifizieren Sie, dass es jedes Element in Γ ein beidseitiges inverses Element in Γ hat, d.h. $\forall g \in \Gamma \exists g' \in \Gamma : gg' = \text{id} = g'g$.

Aufgabe 2

Es seien ψ_1, ψ_2 und ψ_3 Abbildungen von einer Menge E auf sich selbst. Zeigen Sie das gilt: $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3 = \psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)$.

Aufgabe 3

Satz: Eine Isometrie von \mathbb{R}^3 ist durch ihre Werte auf vier nicht-koplanaren Punkten vollständig festgelegt.

- (i) Bestimmen Sie alle Symmetrien des Tetraeders. Wie viele sind es?
- (ii) Wie viele geometrisch verschiedene *Gestalten* nehmen die Symmetrien in Teil (i) an?

Aufgabe 4

Es sei P_n ein reguläres n -Eck und D_n dessen Symmetriegruppe, die sogenannte *Diedergruppe*.

- (i) Bestimmen sie D_n heuristisch und vergleichen Sie $|D_n|$ mit der Anzahl der Permutationen der Eckenmenge von P_n .
- (ii) Es sei $T_n := \{(e, k) \mid e \text{ ist Ecke von } P_n, k \text{ ist Kante von } P_n \text{ und enthält } e\}$. Zeigen Sie, dass es für beliebige $(e, k), (e', k') \in T_n$ ein Element $g \in D_n$ gibt, sodass $g(e) = e'$ und $g(k) = k'$. *Man sagt, dass D_n transitiv auf T_n wirkt.*
- (iii) Zeigen Sie, dass die Menge D_n aus Teil (i) vollständig ist.

Aufgabe 5

Es sei ϕ eine Isometrie der Ebene E . Ein Punkt $P \in E$ ist ein *Fixpunkt* von ϕ , wenn $\phi(P) = P$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) Es gibt keine Isometrie mit genau zwei Fixpunkten.
- (ii) Falls ϕ drei nicht-kollineare Fixpunkte hat, dann ist ϕ die Identität.
- (iii) Falls $\phi^3 = \text{id}$ gilt, dann hat ϕ einen Fixpunkt.
- (iv) Wenn ϕ einen Fixpunkt hat, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\phi^n = \text{id}$.