# Serie 3

## Aufgabe 1

Es sei $D_n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

(i) Zeigen Sie, dass $D_n$ von zwei Spiegelungen erzeugt werden kann.

(ii) Zeigen Sie, dass $D_n$ von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt werden kann.

(iii) Warum kann $D_n$ nicht von einem einzelnen Element erzeugt sein?

## Aufgabe 2

Es sei $G$ eine Gruppe und $g \in G$. Wir sagen, dass $g$ *Ordnung* $m$ hat, und schreiben $\mathrm{ord}(g) = m$, falls $g^m = 1$ und $g^k \neq 1$ für alle $0 < k < m$. Falls $g^m \neq 1$ für alle $m > 0$, so sagen wir, dass $g$ unendliche Ordnung hat.

Zeigen Sie, dass jedes Element einer endlichen Gruppe endliche Ordnung hat.

## Aufgabe 3

Es sei $D_n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

(i) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $D_4$.

(ii) Wie viele Homomorphismen gibt es zwischen $D_4$ und $C_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$?
*Hinweis: Der Kern eines Homomorphismus ist stets eine Untergruppe.*

(iii)* Wie viele zu $D_4$ isomorphe Untergruppen von $\mathrm{Sym}(W)$ können Sie finden?

## Aufgabe 4

Es bezeichne $D$ das Dodekaeder und $I$ das Ikosaeder. Argumentieren Sie, dass $\mathrm{Sym}(I)$ und $\mathrm{Sym}(D)$ isomorph sind.

*Hinweis: Die auf der Website verlinkten Videos können hilfreich sein.*

## Aufgabe 5 — Wahr oder Falsch

Es sei $G$ eine Gruppe und $g, h \in G$.

(i) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.

(ii) Es sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(ghg^{-1})^n = 1$.

(iii) Für jedes $n > 0$ besitzt die Gleichung $x^n = g$ eine Lösung für $x \in G$.

(iv) Die Gleichung $g^{-1}xg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

## Aufgabe 6 — Wahr oder Falsch

Es sei $G$ eine nicht-triviale Gruppe.

(i) Die Gruppe $G$ hat mindestens zwei verschiedene Untergruppen.

(ii) Sind $H_1, H_2$ Untergruppen von $G$, so auch $H_1 \cap H_2$.

(ii) Sind $H_1, H_2$ Untergruppen von $G$, so auch $H_1 \cup H_2$.

## Aufgabe 7*

Gibt es unter den vier Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ zwei, die zueinander isomorph sind?