# Serie 4

## Aufgabe 1 — Wahr oder Falsch

Es sei $G$ eine Gruppe. Für $h \in G$ betrachten wir die Abbildungen

$$C_h, L_h : G \to G,\ C_h(g) = h^{-1}gh,\ L_h(g) = hg$$

genannt *Konjugation* beziehungsweise *Linksmultiplikation*. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung $C_h$ bijektiv.

(ii) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung $C_h$ ein Isomorphismus.

(iii) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung $L_h$ bijektiv.

(iv) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung $L_h$ ein Isomorphismus.

## Aufgabe 2

Es sei $n$ eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe $D_n$.

## Aufgabe 3

Es seien $G_1$ und $G_2$ Gruppen. Das *direkte Produkt* von $G_1$ und $G_2$ ist die Gruppe bestehend aus der Menge $G_1 \times G_2$ und der Verknüpfung

$$(g_1, g_2) \circ (g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2') \quad ((g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times G_2).$$

(i) Ist $S_3$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?

(ii) Ist $\mathbb{Z}_6$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?

(iii) Es sei $V$ die Untergruppe von $D_4$, die von den Spiegelungen zweier zueinander orthogonaler Achsen erzeugt wird. Ist $V$ isomorph zu $\mathbb{Z}_4$?

## Aufgabe 4

(i) Konstruieren Sie einen surjektiven Homomorphismus von der Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(W)$ des Würfels nach $S_3$.

(ii) Konstruieren Sie einen Homomorphismus von $\mathrm{Sym}(W)$ nach $S_4$ so, dass der Kern aus genau zwei Elementen besteht.

## Aufgabe 5

Es bezeichne $\mathrm{Sym}(W)$ die Symmetriegruppe des Würfels. Es gilt $|\mathrm{Sym}(W)| = 48$. Gibt es zu jedem Teiler von 48 eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$ dieser Ordnung?