# Serie 5

## Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegrupppe des $n$-dimensionalen Einheitskubus.

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(D)$ des Dodekaeders $D$, indem sie einen Punkt in $D$ finden, dessen Stabilisator in $\mathrm{Sym}(D)$ trivial ist.

## Aufgabe 3

Es sei $G$ eine Gruppe. Zwei Untergruppen $H_1$ und $H_2$ von $G$ heißen *konjugiert*, geschrieben $H_1 \sim H_2$, falls $a^{-1}H_1a = H_2$ für ein $a \in G$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Kollektion der Untergruppen von $G$ ist.

Die Äquivalenzklasse von $H \leq G$, geschrieben $[H]$, heißt *Konjugationsklasse* von $H$ in $G$.

(ii) Es sei $X$ eine Menge und $G \times X \to X$ eine Gruppenoperation von $G$ auf $X$. Zeigen Sie: Falls $x, y$ im gleichen Orbit sind, dann sind ihre Stabilisatoren $G_x$ und $G_y$ konjugiert.

Die Konjugationsklasse $[G_x]$ ist der *Orbittyp* von $x \in X$.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes Element von $[G_x]$ der Stabilisator in $G$ eines Elements des Orbits von $x$ ist.

## Aufgabe 4

Es bezeichne $W$ den Würfel und $\mathrm{Sym}(W)$ seine Symmetriegruppe

(i) Bestimmen Sie alle Orbittypen der Operation von $\mathrm{Sym}(W)$ auf $W$.

(ii) Zeichnen Sie einen Orbit jeden Typs aus Teil (i).

(iii) Bestimmen Sie den Stabilisator eines Punktes aus jedem Orbit in Teil (ii).

(iv) Gibt es eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$, die nicht gleich dem Stabilisator in $\mathrm{Sym}(W)$ eines Punktes von $W$ ist?