# Serie 6

## Aufgabe 1

Es sei $G$ eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *normal*, falls $H = g^{-1}Hg$ für alle $g \in G$. Zwei Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$ heißen *konjugiert*, falls ein $g \in G$ existiert, sodass $H_1 = g^{-1}H_2g$.

(i) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$ der Translationen in $\mathbb{R}^n$ normal in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass alle Stabilisatoregruppen $\mathrm{Isom}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{R}^n$, zueinander konjugiert sind.

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie die von allen Punktspiegelungen an Punkten in $\mathbb{R}^2$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

## Aufgabe 3

Zeigen Sie (rein geometrisch), dass die Verknüpfung zweier Drehungen von $\mathbb{R}^3$ um Achsen, die sich in einem Punkt schneiden, wieder eine Drehung ist.

*Hinweis*: Man betrachte die Ebene E bestimmt durch die Drehachsen der beiden Drehungen und faktorisiere jede Drehung als das Produkt zweier Spiegelungen.

## Aufgabe 4

Gemäß Vorlesung kann jede Isometrie der Ebene als Verknüpfung von höchstens drei Spiegelungen geschrieben werden. Zeigen Sie: Falls $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ eine Verknüpfung von genau zwei Geradenspiegelungen ist, dann ist $\varphi$ genau dann eine Rotation, wenn $\varphi$ einen Fixpunkt hat.

## Aufgabe 5

Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wirkt auf der Ebene durch Translationen $T_{(m,n)}$ um ganzzahlige Distanzen $m$ in die $x$- und $n$ in die $y$-Richtung. Betrachten Sie die Gruppe $G$ von Bewegungen der Ebene die durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und die Gleitspiegelung $B : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)$ erzeugt wird.

(i) Es gilt $B \circ T_{(m,n)} = T_{(m,n)} \circ B'$ für ein $B' \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Bestimmen Sie $B'$.

(ii) Finden Sie alle Elemente von $G$.

(iii) Was ist der Index von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in $G$?

(iv) Finden Sie eine Schachbrettmusterung $F$ von $\mathbb{R}^2$ (mit Formen oder Farben), sodass $\mathrm{Sym}(F) = G$. (Knörrer, Seiten 61-63.)