Serie 1

Aufgabe 1

Eine Symmetrie einer Figur $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ist per Definition eine Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi(F) = F$ gilt.

Betrachten Sie das gleichschenklige Dreieck Δ mit den Eckpunkten $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$ und $C = (0, 1)$ innerhalb von $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der y-Achse. Ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{cases} s(x) & x \in \Delta \\ x & x \notin \Delta \end{cases}$$

eine Symmetrie von Δ gemäß der oben stehenden Definition?

Lösung

Gemäß oben stehender Definition ist eine Symmetrie von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ insbesondere eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung φ ist keine solche Isometrie von $\mathbb{R}^2$: Betrachte z.B. den Punkt $D := (2, -1) \notin \Delta$. Dann ist

$$|\varphi(D) - \varphi(B)| = |D - A| = \sqrt{3} \neq 1 = |D - B|.$$

Damit ist φ keine Symmetrie von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$.

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto s(x)$$

hingegen ist eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst und erfüllt $\psi(\Delta) = \Delta$. Somit ist ψ eine Symmetrie von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2

(a) Drucken Sie ein Ausschneide-Muster[1] des Dodekaeders, montieren Sie es und bringen Sie es in die Uebungsstunde mit.

(b) Bestimmen Sie alle Spiegelungsebenen des Würfels und des Dodekaeders.

Lösung

(b) Wir betrachten zunächst den Würfel W. Eine Symmetrieebene E von W verläuft notwendigerweise durch den Schwerpunkt S von W, und der Schnitt von E mit einer (quadratischen) Seitenfläche F muss eine Symmetrieachse s_F von F bilden, also entweder durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte oder Seitenmittelpunkte von F verlaufen. Man bemerke, dass die Ebene E durch den Schwerpunkt S und die Symmetrieachse s_F eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt, bestimmen eine Symmetrieachse s_F einer Seitenfläche F und der Schwerpunkt eine Symmetrieebene von W. Für den Fall, in dem s_F durch gegenüber liegende Seitenmittelpunkte von F verläuft erhalten wir drei Symmetrieebenen von W. Für den Fall, dass

[1] z.B. wie im Anhang.

s_F durch gegenüber liegende Eckpunkte von F verläuft ergeben sich zwei Möglichkeiten für jede der sechs Seitenflächen, die paarweise identische Symmetrieebenen liefern; insgesamt also $3 + 6 = 9$ Symmetrieebenen.

Ein ähnliches Argument wenden wir im Fall des Dodekaeders D an. Jede Symmetrieebene wird durch ein Schwerpunkt S und ihren Durchschnitt s_F mit einer Seitenfläche F bestimmt. Umgekehrt bestimmt jede Symmetrieachse s_F einer Seitenfläche zusammen mit dem Schwerpunkt eine Symmetrieebene von D. Jede Seitenfläche ist ein reguläres Fünfeck und hat damit fünf Symmetrieachsen. Bei 12 Seitenflächen ergeben sich also 60 Symmetrieebenen, von denen aber, wie schon im Fall des Würfels einige identisch sind: Anhand des Modells auf Aufgabe (a) erkennt man, dass je vier Ebenen in dieser 60-elementigen Menge übereinstimmen. Also hat D genau $60/4 = 15$ Symmetrieebenen.

Aufgabe 3

Ein metrischer Raum ist per Definition ein Tupel (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$,

(ii) $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = d(y, x)$, *and*

(iii) $\forall x, y, z \in X : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Eine Isometrie zwischen metrischen Räumen (X, d) und (X', d') ist per Definition eine bijektive Abbildung $\varphi : X \to X'$, sodass für alle $x, y \in X$ gilt: $d'(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$.

Betrachten Sie die Menge $P := \{A, B, C, X\}$. Gegeben sind die Werte

$$d(A, B) = d(B, C) = d(A, C) = 1, \ d(A, X) = d(B, X) = d(C, X) = \frac{1}{2}.$$

(a) Erweitern Sie d zu einer Abbildung $d : P \times P \to [0, \infty)$, sodass (P, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Wie viele Isometrien gibt es zwischen (P, d) und sich selbst?

(c) Es sei d_{eukl} die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine vierelementige Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Isometrie zwischen (P, d) und $(Q, d_{\text{eukl}}|_{Q \times Q})$?

Lösung

(a) Zusätzlich zu den gegeben Werten definieren wir $d(Z, Z) := 0$ für alle $Z \in \{A, B, C, X\}$. Außerdem setzen wir $d(Z, Z') = d(Z', Z)$ für all solche $Z, Z' \in \{A, B, C, X\}$, für die $d(Z', Z)$ zu den gegeben Werten gehört. Damit haben wir nun eine Abbildung $d : P \times P \to [0, \infty)$ definiert.

Diese Abbildung erfüllt per Definition die Bedingungen (i) und (ii). Auch Bedingung (iii) wird erfüllt: Es seien $Z, Z', Z'' \in P$. Wir unterscheiden zwei Fälle: Falls $Z = Z''$ gilt, dann $0 = d(Z, Z'') \leq d(Z, Z') + d(Z', Z'')$, da $d(Z, Z'), d(Z', Z'') \geq 0$ aufgrund der Tatsache, dass der Wertebereich von d durch $[0, \infty)$ gegeben ist. Betrachte nun den Fall $Z \neq Z''$: Wir unterscheiden wiederum zwei Fälle: Falls $X \in \{Z, Z''\}$, so gilt $\frac{1}{2} = d(Z, Z'')$ und mindestens eines der Paare $\{Z, Z'\}, \{Z', Z''\}$ besteht aus verschiedenen Elementen, welche gemäß Definition Abstand mindestens $\frac{1}{2}$ haben, also $d(Z, Z'') = \frac{1}{2} \leq d(Z, Z') + d(Z', Z'')$. Falls $X \notin \{Z, Z''\}$ so gilt $1 = d(Z, Z'')$. Falls nun $Z' = X$, dann $1 = d(Z, Z'') = d(Z, Z') + d(Z', Z'')$. Andernfalls, $1 = d(Z, Z'') \leq 2 = d(Z, Z') + d(Z', Z'')$.

(b) Per Definition, erfüllt eine Isometrie φ von (P, d) auf sich selbst für alle $Z, Z' \in P$ die Gleichung $d(\varphi(Z), \varphi(Z')) = d(Z, Z')$. Insbesondere muss für alle $Z, Z' \in \{A, B, C\}$ die Gleichung $d(\varphi(Z), \varphi(Z')) = d(Z, Z') = 1$ gelten und daher $\varphi(Z), \varphi(Z') \in \{A, B, C\}$. Mit anderen Worten, eine Isometrie von (P, d) auf sich selbst permutiert die Menge $\{A, B, C\} \subseteq P$ und fixiert X. Es existieren genau 6 Permutationen der Menge $\{A, B, C\}$ und jede solche Permutation $\sigma : \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$ definiert eine Isometrie φ_σ von (P, d) auf sich selbst durch

$$\varphi_\sigma : P \to P, \; Z \mapsto \begin{cases} \sigma(Z) & Z \in \{A, B, C\} \\ Z & Z \notin \{A, B, C\} \end{cases}.$$

(c) Falls eine vierelementige Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Isometrie φ zwischen (P, d) und $(Q, d_{\text{eukl}}|_{Q \times Q})$ existieren, so bilden die Punkte

$$\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in Q \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Da für alle $Z \in \{A, B, C\}$ ebenfalls $d(\varphi(Z), \varphi(X)) = d(Z, X) = \frac{1}{2}$ gilt, liegt der Punkt $\varphi(X) \in Q$ auf dem Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um jeden der Punkte $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$. Da diese drei Kreise keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben, muss die Annahme falsch sein. Es gibt also keine solche Teilmenge Q und Isometrie φ.