Serie 2

Aufgabe 1

Es sei $\Gamma = \{\mathrm{id}, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ die Symmetriegruppe des regulären Dreiecks.

(i) Fertigen Sie eine Multiplikationstafel für Γ an.

(ii) Folgern Sie aus Teil (i), dass Γ abgeschlossen bezüglich Hintereinanderschaltung ist (Behauptung 1 der Vorlesung).

(iii) Verifizieren Sie, dass es jedes Element in Γ ein beidseitiges inverses Element in Γ hat, d.h. $\forall g \in \Gamma\ \exists g' \in \Gamma: \ gg' = \mathrm{id} = g'g$.

Lösung

(i) Dank der Tatsache, dass eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$ durch ihre Werte auf drei nicht-kollinearen Punkten festgelegt ist, also zum Beispiel den Eckpunkten des regulären Dreiecks, ergibt sich die folgende Multiplikationstafel.

$\circ$	id	ψ_1	ψ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
id	id	ψ_1	ψ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
ψ_1	ψ_1	ψ_2	id	ϕ_3	ϕ_1	ϕ_2
ψ_2	ψ_2	id	ψ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_1
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	id	ψ_1	ψ_2
ϕ_2	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_1	ψ_2	id	ψ_1
ϕ_3	ϕ_3	ϕ_1	ϕ_2	ψ_1	ψ_2	id

(ii) Die Menge Γ ist abgeschlossen bezüglich Hintereinanderschaltung schlicht aufgrund der Tatsache, dass bei der Hintereinanderschaltung zweier, und deshalb auch mehrerer Elemente aus Γ gemäß Teil (i) keine neuen Elemente auftreten.

(iii) Mithilfe von Teil (i) sieht man, dass wir

$$\mathrm{id}' := \mathrm{id}, \ \psi_1' := \psi_2, \ \psi_2' := \psi_1, \ \text{und } \phi_i' := \phi_i$$

für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ wählen können.

Aufgabe 2

Es seien ψ_1, ψ_2 und ψ_3 Abbildungen von einer Menge E auf sich selbst. Zeigen Sie das gilt: $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3 = \psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)$.

Lösung

Wir zeigen, dass die Abbildungen $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3$ und $\psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)$ auf allen Punkten $x \in E$ übereinstimmen und damit gleich sind. Es gilt in der Tat:

$$((\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3)(x) = (\psi_1 \circ \psi_2)(\psi_3(x)) = \psi_1(\psi_2(\psi_3(x))),$$

$$\psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)(x) = \psi_1((\psi_2 \circ \psi_3)(x)) = \psi_1(\psi_2(\psi_3(x))).$$

Man bezeichnet dies als Assoziativität *der Verknüpfung von Abbildungen.*

Aufgabe 3

Satz: Eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$ ist durch ihre Werte auf vier nicht-koplanaren Punkten vollständig festgelegt.

(i) Bestimmen Sie alle Symmetrien des Tetraeders. Wie viele sind es?

(ii) Wie viele geometrisch verschiedene *Gestalten* nehmen die Symmetrien in Teil (i) an?

Lösung

(i) Eine Symmetrie des Tetraeders ist durch ihr Bild auf den vier nicht-koplanaren Eckpunkten eindeutig bestimmt. Wir zeigen, dass jede Permutation der Eckpunkte durch eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die das Tetraeder erhält, realisiert werden kann. Die Symmetriegruppe des Tetraeders ist dann von der Ordnung $4! = 24$.

Wir erkennen zunächst für jeden der vier Eckpunkte eine Drehachse, die durch den jeweiligen Eckpunkt und den Schwerpunkt der gegenüber liegenden Seite verläuft. Außerdem verläuft eine Drehachse durch je zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte. Aus den genannten Drehachsen ergeben sich $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$ Drehungen, sowie die Identität, also insgesamt 12 Permutationen.

Betrachte nun noch die Symmetriebene, die durch eine gegebene der sechs Kanten und senkrecht zur gegenüberliegenden Kante verläuft. Durch Verknüpfung der Drehungen mit diesen Ebenenspiegelungen erhält man auf nicht eindeutige Weise alle restlichen Permutationen der Eckpunkte.

(ii) Es treten offenbar die Identität, Drehungen, Ebenenspiegelungen und Verknüpfungen derselben, sogenannte Drehspiegelungen auf.

Aufgabe 4

Es sei P_n ein reguläres n-Eck und D_n dessen Symmetriegruppe, die sogenannte *Diedergruppe.*

(i) Bestimmen sie D_n heuristisch und vergleichen Sie $|D_n|$ mit der Anzahl der Permutationen der Eckenmenge von P_n.

(ii) Es sei $T_n := \{(e,k) \,|\, e \text{ ist Ecke von } P_n,\ k \text{ ist Kante von } P_n \text{ und enthält } e\}$. Zeigen Sie, dass es für beliebige $(e,k), (e',k') \in T_n$ ein Element $g \in D_n$ gibt, sodass $g(e) = e'$ und $g(k) = k'$. *Man sagt, dass D_n* transitiv *auf T_n wirkt.*

(iii) Zeigen Sie, dass die Menge D_n aus Teil (i) vollständig ist.

Lösung

(i) Wie im Fall des gleichseitigen Dreiecks gibt es auch im allgemeinen regulären n-Eck die n Drehungen um den Schwerpunkt um die Winkel $2\pi k/n$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. AuÃ§erdem sieht man für jede der n Kanten und n Eckpunkte eine Spiegelungsgerade durch den entsprechenden Mittelpunkt oder Eckpunkt sowie den Schwerpunkt. Diese Spiegelungen stimmen paarweise überein, sodass wir insgesamt $2n$ Isometrien zählen.

Die Anzahl der Permutationen der n-elementigen Menge der Eckpunkte beträgt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Es gilt also zwar $|D_3| = 3!$ aber für $n \geq 4$ ist $n!$ zunehmend größer als $2n = |D_n|$.

(ii) Es seien $(e, k), (e', k') \in T_n$. Eine geeignete Drehung $g_1 \in D_n$ bildet e auf e' ab. Dann ist $g_1(k)$ eine an e' angrenzende Kante $g_1(k)$. Falls bereits $g_1(k) = k'$ so können wir $g := g_1$ definieren. Andernfalls verknüpfen wir g_1 mit der Spiegelung g_2 entlang der Achse durch e' und den Schwerpunkt des n-Ecks. Dann erfüllt $g := g_2 \circ g_1$ die Behauptung.

(iii) Jede Isometrie des regulären n-Ecks muss den Schwerpunkt, damit Ecken und damit Kanten erhalten. Insbesondere bildet sie Elemente von T_n wieder auf Elemente von T_n ab und ist durch ihr Bild auf einem Element von T_n (und dem Schwerpunkt) eindeutig bestimmt. Da D_n aus Teil (i) gemäß Teil (ii) transitiv auf T_n wirkt, folgt die verlangte Vollständigkeit.

Aufgabe 5

Es sei ϕ eine Isometrie der Ebene E. Ein Punkt $P \in E$ ist ein *Fixpunkt* von ϕ, wenn $\phi(P) = P$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt keine Isometrie mit genau zwei Fixpunkten.

(ii) Falls ϕ drei nicht-kollineare Fixpunkte hat, dann ist ϕ die Identität.

(iii) Falls $\phi^3 = \mathrm{id}$ gilt, dann hat ϕ einen Fixpunkt.

(iv) Wenn ϕ einen Fixpunkt hat, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\phi^n = \mathrm{id}$.

Lösung

(i) Es sei $\phi : E \to E$ eine Isometrie mit zwei Fixpunkten $A \neq B$. Betrachte den Mittelpunkt M der Strecke AB. Da ϕ abstandserhaltend ist, muss $\phi(M)$ sowohl auf dem Kreis mit Radius $d(A, M)$ um A und dem Kreis mit Radius $d(B, M)$ um B liegen. Da $d(A, M) = d(B, M)$ per Definition des Mittelpunkts schneiden sich diese Kreise genau in M. Wir folgern also $\phi(M) = M$ und damit die Behauptung.

(ii) Gemäß Vorlesung ist eine Isometrie der Ebene durch ihre Bilder auf drei nicht-kollinearen Punkten bestimmt. Da ϕ und die Identität $\mathrm{id} : E \to E$ auf den drei nicht-kollinearen Fixpunkten von ϕ übereinstimmen, folgt $\phi = \mathrm{id}$ und damit die Behauptung.

(iii) Wir zeigen, dass die Aussage gilt. Dies ist offenbar der Fall, wenn $\phi = \mathrm{id}$. Wir können für den Rest des Beweises also annehmen, dass $\phi \neq \mathrm{id}$. Dann gibt es einen Punkt $P \in E$ mit $\phi(P) \neq P$. Betrachte die Punktmenge $\{P, \phi(P), \phi^2(P)\}$. Da ϕ eine Isometrie ist, gilt

$$d(P, \phi(P)) = d(\phi(P), \phi^2(P)) = d(\phi^2(P), \phi^3(P)).$$

Da $\phi^3 = \mathrm{id}$ per Voraussetzung, gilt auch $d(\phi^2(P), \phi^3(P)) = d(\phi^2(P), P)$. Insgesamt bilden die Punkte $\{P, \phi(P), \phi^2(P)\}$ also ein gleichseitiges Dreieck.

Es bezeichne S den Schwerpunkt dieses Dreiecks, also den Punkt $S \in E$, der eindeutig durch die Anforderungen

$$d(S, P) = d(S, \phi(P)) = d(S, \phi^2(P))$$

bestimmt ist. Anwenden der Isometrie ϕ liefert nun

$$d(\phi(S), \phi(P)) = d(\phi(S), \phi^2(P)) = d(\phi(S), \phi^3(P)) = d(\phi(S), P)$$

Damit folgt $\phi(S) = S$ aus der Definition von S.

(iv) Es sei ϕ die Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel $2\pi r$, wobei $r \in (0, 1)$ eine irrationale Zahl sei. Dann fixiert ϕ den Ursprung und für $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ^n die Drehung um den Ursprung um den Winkel $2\pi rn$. Da $r \in (0, 1)$ irrational ist, ist es auch $rn \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist rn für kein $n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig und die Behauptung somit widerlegt.