

Serie 3

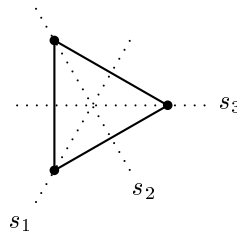
Aufgabe 1

Es sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

- (i) Zeigen Sie, dass D_n von zwei Spiegelungen erzeugt werden kann.
- (ii) Zeigen Sie, dass D_n von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt werden kann.
- (iii) Warum kann D_n nicht von einem einzelnen Element erzeugt sein?

Lösung

Nach Aufgabe 2.4 besteht die Diedergruppe D_n aus der Identität sowie $n - 1$ Drehungen und n Spiegelungen. Wir schreiben $D_n = \{r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n\}$, wobei r_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) die Drehung um den Schwerpunkt um den Winkel $2\pi k/n$ bezeichnet. Insbesondere ist r_n die Identität. Die Spiegelungen s_k seien so gewählt, dass für jedes $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ die Achse von s_k mit der von s_{k+1} einen positiven Winkel von $2\pi/2n$ bildet.



- (i) Betrachte die aufeinanderfolgenden Spiegelungen s_1 und s_2 , deren Achsen den positiven Winkel $2\pi/2n$ einschließen. Dann gilt $s_2 \circ s_1 = r_1$. Die von s_1 und s_2 erzeugte Untergruppe von D_n enthält damit alle Drehungen $r_k = r_1^k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$). Da außerdem $s_{k+2} = r_1 s_k r_1^{-1}$ gilt, erhalten wir iterativ alle Spiegelungen.
- (ii) Wir wählen r_1 und s_1 . Wie oben enthält die von r_1 und s_1 erzeugte Untergruppe von D_n alle Drehungen $r_k = r_1^k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) sowie die Spiegelungen mit ungeradem Index. Da außerdem $s_2 = s_1 \circ r_{n-1}$, erhalten wir ebenfalls alle Spiegelungen mit geradem Index.
- (iii) Es sei g ein Element von D_n . Wenn g die Identität ist, so erzeugt g die triviale Untergruppe. Falls g eine nicht-triviale Drehung ist, so erzeugt g eine Untergruppe der Gruppe der Drehungen. Schließlich, wenn g eine Spiegelung ist, so erzeugt g die Untergruppe $\{\text{id}, g\}$. In keinem Fall stimmt die von g erzeugte Untergruppe mit ganz D_n überein.

Aufgabe 2

Es sei G eine Gruppe und $g \in G$. Wir sagen, dass g *Ordnung* m hat, und schreiben $\text{ord}(g) = m$, falls $g^m = 1$ und $g^k \neq 1$ für alle $0 < k < m$. Falls $g^m \neq 1$ für alle $m > 0$, so sagen wir, dass g unendliche Ordnung hat.

Zeigen Sie, dass jedes Element einer endlichen Gruppe endliche Ordnung hat.

Lösung

Es sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Weiterhin sei $n := |G|$. Betrachte die Menge $P := \{g^m \mid 0 \leq m \leq n + 1\}$. Nach dem Schubfachprinzip stimmen mindestens zwei Elemente von P überein, etwa $g^i = g^j$ für $i, j \in \{0, \dots, n + 1\}$ mit $i \neq j$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $j > i$. Dann gilt nach der Kürzungsregel $g^{j-i} = 1_G$ und $j - i > 0$, d.h., g hat endliche Ordnung.

Aufgabe 3

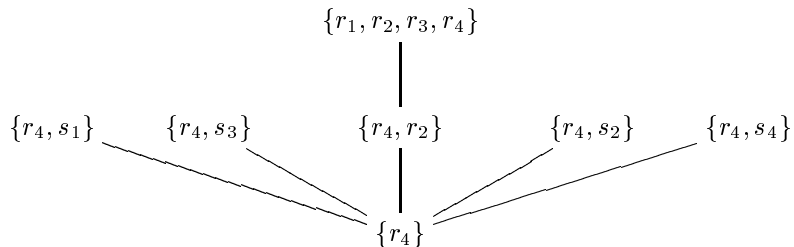
Es sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

- (i) Bestimmen Sie alle Untergruppen von D_4 .
- (ii) Wie viele Homomorphismen gibt es zwischen D_4 und $C_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$?
Hinweis: Der Kern eines Homomorphismus ist stets eine Untergruppe.
- (iii)* Wie viele zu D_4 isomorphe Untergruppen von $\text{Sym}(W)$ können Sie finden?

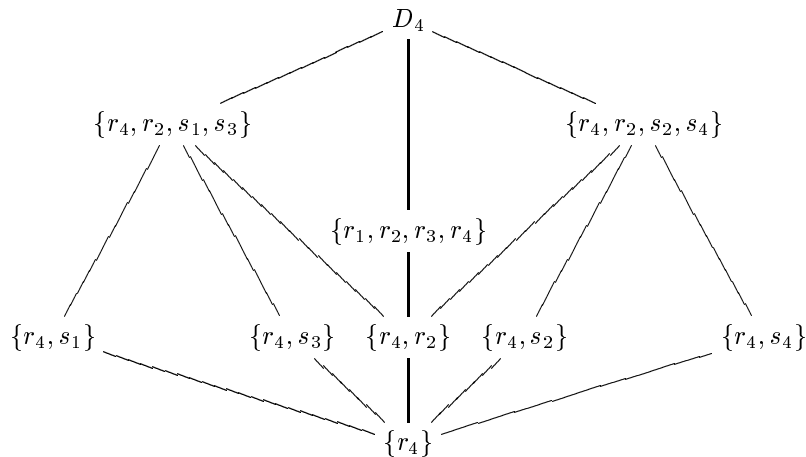
Lösung

Wie in Aufgabe 1, schreiben wir $D_4 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

- (i) Jede Untergruppe einer Gruppe ist von ihren Elementen erzeugt. Wir bestimmen zunächst alle Untergruppen von D_4 , die von einem einzelnen Element erzeugt werden.



Durch Hinzufügen weiterer Elemente und Argumentation wie in Aufgabe 1 erhalten wir in einem zweiten Schritt die restlichen Untergruppen.



- (ii) Es sei $\varphi : D_4 \rightarrow C_2$ ein Homomorphismus. Entweder $\varphi(D_4) = \{\bar{0}\}$, und φ ist der triviale Homomorphismus, der jedes Element von D_4 auf $\bar{0} \in C_2$ abbildet, oder $\varphi(D_4) = C_2$. In diesem Fall muss der Kern eine Untergruppe der Ordnung 4 von D_4 sein. Jede der drei Untergruppen der Ordnung 4 aus Teil (i) tritt auch tatsächlich als Kern auf: Man prüfe jeweils, dass die Abbildung der restlichen Elemente auf $\bar{1} \in C_2$ jeweils einen Homomorphismus liefert.
- (iii) Wir erläutern hier zwei Wege, eine zu D_4 isomorphe Untergruppe von $\text{Sym}(W)$ zu bestimmen.

Jedes der drei Paare paralleler Seitenflächen liefert eine zu D_4 isomorphe Untergruppe, wenn man nur die Drehungen um die Achse durch die Schwerpunkte dieser Seitenflächen und die Spiegelungen an Symmetrieebenen orthogonal zu diesen Seitenflächen berücksichtigt.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein reguläres Tetraeder T dem Würfel so einbeschrieben werden kann, dass Isometrien des Würfels Isometrien des Tetraeders induzieren. Die Isometriegruppe des letzteren ist isomorph zu S_4 nach Aufgabe 2.3. Beschriftet man die Ecken eines regulären Vierecks mit den Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$, so kann die Symmetriegruppe D_4 desselben als Untergruppe von $S_4 \cong \text{Sym}(T) \leq \text{Sym}(W)$ aufgefasst werden.

Aufgabe 4

Es bezeichne D das Dodekaeder und I das Ikosaeder. Argumentieren Sie, dass $\text{Sym}(I)$ und $\text{Sym}(D)$ isomorph sind.

Hinweis: Die auf der Website verlinkten Videos können hilfreich sein.

Lösung

Wie in den Videos illustriert wird, bilden die Seitenflächenschwerpunkte des Dodekaeders ein Ikosaeder und umgekehrt. In solchen einbeschriebenen Situationen ist ersichtlich, dass jede Symmetrie des Dodekaeders auch eine Symmetrie des Ikosaeders ist und umgekehrt. Die Symmetriegruppen sind also isomorph.

Aufgabe 5 — Wahr oder Falsch

Es sei G eine Gruppe und $g, h \in G$.

- (i) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.
- (ii) Es sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(ghg^{-1})^n = 1$.
- (iii) Für jedes $n > 0$ besitzt die Gleichung $x^n = g$ eine Lösung für $x \in G$.
- (iv) Die Gleichung $g^{-1}xg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

Lösung

- (i) Falsch. In der Gruppe $(\mathbb{Z}_2, +) = (\{\bar{0}, \bar{1}\}, +)$ gilt $\bar{0} + \bar{0} = \bar{1} + \bar{1}$ aber $\bar{0} \neq \bar{1}$.
- (ii) Wahr. Berechne $(ghg^{-1})^n \cdot 0.001 = ghg^{-1} ghg^{-1} \dots ghg^{-1} = gh^n g^{-1} = gg^{-1} = 1$.

- (iii) Falsch. In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist die Menge $n\mathbb{Z}$ der n -ten Potenzen für $n > 1$ eine echte Teilmenge.
- (iv) Wahr. Das Element $x := ghg^{-1} \in G$ löst die Gleichung. Falls ein beliebiges Element $x \in G$ die Gleichung löst, so ergibt sich durch Umformen mithilfe der Kürzungsregel: $x = ghg^{-1}$.

Aufgabe 6 — Wahr oder Falsch

Es sei G eine nicht-triviale Gruppe.

- (i) Die Gruppe G hat mindestens zwei verschiedene Untergruppen.
- (ii) Sind H_1, H_2 Untergruppen von G , so auch $H_1 \cap H_2$.
- (ii) Sind H_1, H_2 Untergruppen von G , so auch $H_1 \cup H_2$.

Lösung

- (i) Wahr. Da G nicht-trivial ist, sind die Untergruppen $\{1_G\}$ und G von G verschieden.
- (ii) Wahr. Da H_1 und H_2 Untergruppen von G sind, gilt $1_G \in H_1$ und $1_G \in H_2$, also $1_G \in H_1 \cap H_2$. Sind $h, h' \in H_1 \cap H_2$, so auch $h, h' \in H_1$ und $h, h' \in H_2$. Da H_1 und H_2 Untergruppen von G sind, folgern wir $h \circ h' \in H_1$ und $h \circ h' \in H_2$, also $h \circ h' \in H_1 \cap H_2$. Ein analoges Argument zeigt, dass $H_1 \cap H_2$ Inverse enthält.
- (iii) Falsch. Es sei $G := (\mathbb{Z}_6, +)$, $H_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ und $H_2 := \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Dann ist $H_1 \cup H_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ nicht abgeschlossen. Zum Beispiel ist $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$ nicht in $H_1 \cup H_2$ enthalten aber $\bar{2}, \bar{3} \in H_1 \cup H_2$.

Aufgabe 7*

Gibt es unter den vier Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}^*, \cdot) , $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ zwei, die zueinander isomorph sind?

Lösung

Wir zeigen, dass die Gruppen paarweise nicht isomorph sind, indem wir Eigenschaften von Gruppen benutzen, die unter einem Isomorphismus erhalten bleiben. Zum Beispiel ist die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist von einem einzelnen Element erzeugt. Dies trifft aber auf keine der anderen drei Gruppen zu. Es sei nun G eine der restlichen drei Gruppen und $a \in G$. Für ein Element $a \in G$ betrachten wir die Gleichung $x^2 = a$. Es gilt:

- (i) In $(\mathbb{Q}, +)$ hat die Gleichung genau eine Lösung, nämlich $a/2$.
- (ii) In (\mathbb{Q}^*, \cdot) existieren genau die zwei Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$, falls $a > 0$ und \sqrt{a} rational ist; und keine Lösung andernfalls.
- (iii) In $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ existiert genau eine Lösung $x = \sqrt{a}$, falls $a > 0$ und \sqrt{a} rational ist; und keine Lösung andernfalls.

Weil das Lösungsverhalten der Gleichung $x^2 = a$ für isomorphe Gruppen das gleiche ist, sind diese Gruppen paarweise nicht isomorph.