Serie 4

Aufgabe 1 — Wahr oder Falsch

Es sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ betrachten wir die Abbildungen

$$C_h, L_h : G \to G,\ C_h(g) = h^{-1}gh,\ L_h(g) = hg$$

genannt *Konjugation* beziehungsweise *Linksmultiplikation*. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung C_h bijektiv.

(ii) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung C_h ein Isomorphismus.

(iii) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung L_h bijektiv.

(iv) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung L_h ein Isomorphismus.

Lösung

(i) Wahr. Es gilt $C_{h^{-1}} \circ C_h = \mathrm{id}_G = C_h \circ C_{h^{-1}}$. Also ist C_h bijektiv.

(ii) Wahr. Für $g, g' \in G$ gilt $C_h(gg') = h^{-1}gg'h = h^{-1}ghh^{-1}g'h = C_h(g)C_h(g')$. Damit ist C_h ein Homomorphismus und wegen Teil (i) ein Isomorphismus.

(iii) Wahr. Es gilt $L_{h^{-1}} \circ L_h = \mathrm{id}_G = L_h \circ L_h^{-1}$. Also ist L_h bijektiv.

(iv) Falsch. Es sei G eine nicht-triviale Gruppe und $h \in G$ nicht das neutrale Element. Dann gilt $L_h(1) = h \neq 1$. Also ist L_h kein Homomorphismus.

Aufgabe 2

Es sei n eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_n.

Lösung

Die Ordnung einer Untergruppe $H \leq D_n$ teilt $|D_n| = 2n$. Da n eine Primzahl ist, gilt also $|H| \in \{1, 2, n, 2n\}$. Die einzige Untergruppe der Ordnung 1 ist die triviale Untergruppe. Die einzige Untergruppe der Ordnung $2n$ ist gleich D_n.

Jede Spiegelung erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 2. Es sei r eine echte Drehung. Dann ist $\langle r \rangle$ eine nicht-triviale Untergruppe der n-elementigen Gruppe der Drehungen in D_n und $|\langle r \rangle|$ divides n. Da n eine Primzahl ist, folgt $|\langle r \rangle| = n$.

Jede Untergruppe, die zwei verschiedene Spiegelungen enthält ist bereits ganz D_n, da die Ordnung einer solchen Untergruppe strikt größer als 2 ist und kein Teiler von n sein kann, da sie eine Untergruppe der Ordnung 2 enthält.

Jede Untergruppe, die eine Spiegelung und eine Drehung enthält ist ebenfalls notwendigerweise die gesamte Gruppe, da ihre Ordnung strikt größer als n ist.

Alle Untergruppen von D_n für eine Primzahl n sind also:

- Die triviale Untergruppe,
- die n zwei-elementigen, von einer Spiegelung erzeugten, Untergruppen,
- die n-elementige Untergruppe der Drehungen, und
- die ganze Gruppe.

Aufgabe 3

Es seien G_1 und G_2 Gruppen. Das *direkte Produkt* von G_1 und G_2 ist die Gruppe bestehend aus der Menge $G_1 \times G_2$ und der Verknüpfung

$$(g_1, g_2) \circ (g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2') \quad ((g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times G_2).$$

(i) Ist S_3 isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?

(ii) Ist $\mathbb{Z}_6$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?

(iii) Es sei V die Untergruppe von D_4, die von den Spiegelungen zweier zueinander orthogonaler Achsen erzeugt wird. Ist V isomorph zu $\mathbb{Z}_4$?

Lösung

(i) Nein. Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ is abelsch, S_3 aber nicht: Beispielsweise gilt $(12)(23) = (123)$ aber $(23)(12) = (132)$. Also kann S_3 nicht zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorph sein.

(ii) Ja. Wir definieren $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ durch $\varphi(\overline{n}) := n(\overline{1}, \overline{1})$. Dies ist wohldefiniert, da für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(n + 6k)(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{n + 6k}, \overline{n + 6k}) = (\overline{n}, \overline{n}) = n(\overline{1}, \overline{1}).$$

Die Abbildung φ ist nun ein Homomorphismus, da

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{n}+\overline{m}) &= \varphi(\overline{n + m}) = (n + m)(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{n + m}, \overline{n + m}) = (\overline{n} + \overline{m}, \overline{n} + \overline{m}) \\ &= (\overline{n}, \overline{n}) + (\overline{m}, \overline{m}) = n(\overline{1}, \overline{1}) + m(\overline{1}, \overline{1}) = \varphi(\overline{n}) + \varphi(\overline{m}).\end{aligned}$$

(iii) Nein. Man prüft zunächst, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to V$, die $(\overline{1}, \overline{0})$ und $(\overline{0}, \overline{1})$ auf die beiden Spiegelungen abbildet ein Isomorphismus ist. Die Frage ist also, ob $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ ist. Da beispielsweise $\mathbb{Z}_4$ ein Element der Ordnung 4 enhält aber $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nicht, kann dies nicht der Fall sein.

Aufgabe 4

(i) Konstruieren Sie einen surjektiven Homomorphismus von der Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(W)$ des Würfels nach S_3.

(ii) Konstruieren Sie einen Homomorphismus von $\mathrm{Sym}(W)$ nach S_4 so, dass der Kern aus genau zwei Elementen besteht.

Lösung

(i) Wir betrachten den Würfel in $\mathbb{R}^3$ so, dass der Schwerpunkt gerade der Ursprung ist. Dann induziert jede Symmetrie des Würfels eine Permutation der drei Koordinatenachsen: Es bezeichne $\{x, y, z\}$ die Menge, die aus der x-Achse, y-Achse und z-Achse besteht, betrachtet als Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Wir definieren $\varphi : \mathrm{Sym}(W) \to \mathrm{Sym}(\{x, y, z\})$ via $\varphi(g) = \sigma$, falls g die x-Achse auf die $\sigma(x)$-Achse abbildet, die y-Achse auf die $\sigma(y)$-Achse und die z-Achse auf die $\sigma(z)$-Achse. Da es sich in beiden Gruppen um die Hintereinanderschaltung von Abbildungen handelt, ist φ ein Homomorphismus.

(ii) Es sei W wie in Teil (i). Jede Symmetrie des Würfels induziert eine Permutation der vier Diagonalen. Es bezeichne $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ die Menge der Diagonalen von W. Dann erhalten wir analog zu Teil (i) einen Homomorphismus $\psi : \mathrm{Sym}(W) \to \mathrm{Sym}(\{d_1, d_2, d_3, d_4\})$. Im Kern von ψ liegen offenbar wenigstens die Identität und die Punktspiegelung am Ursprung. Außerdem ist die Abbildung ψ surjektiv: Zum Beispiel induziert die Spiegelung an der Ebene, die durch zwei Diagonalen definiert ist, die Vertauschung der übrigen zwei Diagonalen. Da diese Elemente S_4 erzeugen, folgt, dass ψ surjektiv ist. Wegen $|\mathrm{Sym}(\{d_1, d_2, d_3, d_4\})| = 24$, $|\mathrm{Sym}(W)| = 48$ und der Tatsache, dass Homomorphismen konstant auf Nebenklassen des Kerns sind, folgt $2 \leq |\ker\psi| \leq 48/24 = 2$. Also $|\ker\psi| = 2$.

Aufgabe 5

Es bezeichne $\mathrm{Sym}(W)$ die Symmetriegruppe des Würfels. Es gilt $|\mathrm{Sym}(W)| = 48$. Gibt es zu jedem Teiler von 48 eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$ dieser Ordnung?

Lösung

Ja. Die Teiler von 48 sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 und 48. Die triviale Untergruppe hat Ordnung 1. Die gesamte Gruppe hat Ordnung 48. Eine Untergruppe der Ordnung 24 ist durch die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(T) \cong S_4$ des Tetraeders gegeben, mit der üblichen Einbettung von T in W. Eine Untergruppe der Ordnung 12 von W ist dann durch $\mathrm{Sym}_+(T)$ gegeben. Da S_4 eine zu S_3 isomorphe Untergruppe enhält — etwa die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$, die 4 auf sich selbst abbilden — erhalten wir ebenfalls Untergruppen der Ordnungen 2, 3 und 6.

Eine Untergruppe der Ordnung 4 erhalten wir mittels zweier Spiegelungen an zu einander orthogonalen Koordinatenebenen, analog zu Aufgabe 3 (iii). Durch Hinzufügen der Ebene, die zu diesen beiden orthogonal ist und ebenfalls durch den Schwerpunkt verläuft, erhalten wir eine Untergruppe der Ordnung 8.

Eine Untergruppe der Ordnung 16 erhalten wir nun durch Kombination der obigen Gruppe der Ordnung 8, die Koordinatenachsen umkehrt, mit einer Drehung, die etwa die x-Achse in die y-Achse überführt.