Serie 5

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegrupppe des n-dimensionalen Einheitskubus.

Lösung

Der n-dimensionale Einheitskubus W_n hat 2^n Ecken, nämlich

$$E := \{v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \; v_i \in \{\pm 1\}\}.$$

An jede Ecke v liegen n Kanten an: Die benachbarten Ecken von $v \in E$ erhält man durch Änderung genau eines Vorzeichens in v. Eine Symmetrie von W_n ist durch ihr Bild auf einer Ecke und ihrer anliegenden Kanten bestimmt. Umgekehrt lässt sich jede Ecke und Kantenpermutation durch eine Symmetrie realisieren, sodass $|\operatorname{Sym}(W_n)| = 2^n \cdot n!$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe $\operatorname{Sym}(D)$ des Dodekaeders D, indem sie einen Punkt in D finden, dessen Stabilisator in $\operatorname{Sym}(D)$ trivial ist.

Lösung

Es sei F eine Seitenfläche des Dodekaeders D und $p \in F$ ein Punkt, der auf keiner Symmetrieachse des regulären Fünfecks F liegt. Dann ist der Stabilisator von p in $\operatorname{Sym}(D)$ trivial: Eine Symmetrie, die p fixiert, muss F auf sich selbst abbilden und induziert damit eine Symmetrie von F. Die einzige Symmetrie von F, die p fixiert ist aber die Identität. Damit fixiert die ursprüngliche Symmetrie von D eine Seitenfläche und ist somit trivial. Wir bestimmen die Ordnung von $\operatorname{Sym}(D)$ nun anhand der Bahnformel

$$|\operatorname{Sym}(D)| = |\operatorname{Orbit}_{\operatorname{Sym}(D)}(p)| \cdot |\operatorname{Stab}_{\operatorname{Sym}(D)}(p)| = |\operatorname{Orbit}_{\operatorname{Sym}(D)}(p)|.$$

Jede Symmetrie der regulär fünfeckigen Seitenfläche F, d.h. jedes Element von D_5, wird durch eine Symmetrie von ganz D realisiert. Umgekehrt induziert jede Symmetrie von D, die F erhält eine Symmetrie von F. Der Orbit von p unter $\operatorname{Sym}(D)$ innerhalb von F besteht also aus 10 Punkten. Da F auf eine beliebige andere der 12 Seitenfläche von D abgebildet werden kann ergeben sich insgesamt $12 \cdot 10 = 120$ Punkte im Orbit von p, also $|\operatorname{Sym}(D)| = 120$.

Aufgabe 3

Es sei G eine Gruppe. Zwei Untergruppen H_1 und H_2 von G heißen *konjugiert*, geschrieben $H_1 \sim H_2$, falls $a^{-1} H_1 a = H_2$ für ein $a \in G$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Kollektion der Untergruppen von G ist.

Die Äquivalenzklasse von $H \leq G$, geschrieben $[H]$, heißt *Konjugationsklasse* von H in G.

(ii) Es sei X eine Menge und $G \times X \to X$ eine Gruppenoperation von G auf X. Zeigen Sie: Falls x, y im gleichen Orbit sind, dann sind ihre Stabilisatoren G_x und G_y konjugiert.

Die Konjugationsklasse $[G_x]$ ist der *Orbittyp* von $x \in X$.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes Element von $[G_x]$ der Stabilisator in G eines Elements des Orbits von x ist.

Lösung

(i) Es sei H_1 eine Untergruppe von G. Dann ist H_1 zu sich selbst konjugiert, da $e^{-1}H_1e = H_1$ für die Identität $e \in G$. Also ist Konjugiertheit reflexiv. Ist H_2 eine weitere Untergruppe von G, die konjugiert zu H_1 ist, so gilt $a^{-1}H_1a = H_2$ für ein $a \in G$. Damit ist auch $(a^{-1})^{-1}H_2a^{-1} = H_1$. Also ist Konjugiertheit eine symmetrische Relation. Es sei nun H_3 eine weitere Untergruppe von G. Falls H_1 zu H_2 konjugiert ist, etwa $a^{-1}H_1a = H_2$, und H_2 zu H_3, etwa $b^{-1}H_2b = H_1$, so ist auch H_1 zu H_3 konjugiert: Es gilt nämlich $(ab)^{-1}H_1(ab) = H_3$ nach Substitution von H_2 in der zweiten mithilfe der ersten Gleichung.

(ii) Falls $x, y \in X$ im selben Orbit unter der Operation von G auf X liegen, so existiert ein $g \in G$ mit $gx = y$. Wir zeigen: $G_x = g^{-1}G_yg$. Einerseits haben wir $G_x \supseteq g^{-1}G_yg$, da für alle $h \in G_y$ gilt: $g^{-1}hg \cdot x = g^{-1}h \cdot (g \cdot x) = g^{-1}h \cdot y = g^{-1} \cdot (h \cdot y) = g^{-1} \cdot y = x$. Anderseits gilt durch Vertauschen der Rollen von x und y auch $G_y \supseteq gG_xg^{-1}$ und damit $g^{-1}G_yg \supseteq G_x$.

(iii) Es sei $H \in [G_x]$, etwa $g^{-1}G_xg = H$. Wir zeigen: $H = G_{g^{-1}x}$, wobei $g^{-1}x$ per Definition im Orbit von $x \in X$ liegt. Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem Beweis von Teil (ii).

Aufgabe 4

Es bezeichne W den Würfel und $\mathrm{Sym}(W)$ seine Symmetriegruppe

(i) Bestimmen Sie alle Orbittypen der Operation von $\mathrm{Sym}(W)$ auf W.

(ii) Zeichnen Sie einen Orbit jeden Typs aus Teil (i).

(iii) Bestimmen Sie den Stabilisator eines Punktes aus jedem Orbit in Teil (ii).

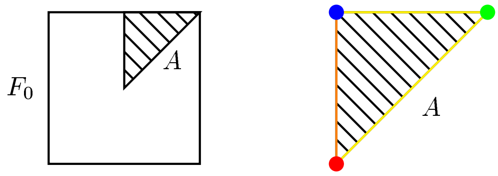
(iv) Gibt es eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$, die nicht gleich dem Stabilisator in $\mathrm{Sym}(W)$ eines Punktes von W ist?

Lösung

Wir betrachten in dieser Lösung den Würfel als Fläche ohne sein Inneres.

(i) Je zwei Punkte in W, die im selben Orbit unter der Operation von $\mathrm{Sym}(W)$ liegen haben denselben Orbittyp gemäß Teil (ii) von Aufgabe 3. Wir bestimmen daher zunächst eine Menge von Repräsentanten für die Orbits, d.h. eine Teilmenge von W, die einen Punkt jeden Orbits entält und, sodass keine zwei Punkte aus dieser Menge im selben Orbit liegen. Jeder

Orbit enthält einen Repräsentanten in einer gegebenen Seitenfläche F_0 von W, da $\mathrm{Sym}(W)$ eine gegebene Seitenfläche auf eine beliebige andere abbilden kann. Innerhalb dieser Seitenfläche genügt es das unten gezeichnete Achtel A zu betrachten, dank der Operation von $D_4 \leq \mathrm{Sym}(W)$, die diese Seitenfläche erhält.



Mithilfe von Teil (ii) und (iii) ergibt sich die nebenstehende Farbkodierung von A nach Orbittyp.

(ii)
- Der Orbit des roten Eckpunktes von A besteht aus allen 6 Seitenflächenmittelpunkten von W.
- Der Orbit des grünen Eckpunktes von A besteht aus allen 8 Eckpunkten von W.
- Der Orbit des blauen Eckpunktes von A besteht aus allen 12 Kantenmittelpunkten von W.
- Der Orbit eines Punktes von einer der gelben oder der orangenen Seite besteht aus 24 Punkten, einer für jedes Bild der jeweiligen Seite unter den Symmetrien von W.
- Der Orbit eines Punktes aus dem Inneren von A besteht aus $6 \cdot 8$ Punkten, einer für jedes Bild von A unter einer Symmetrie von W.

(iii)
- Der Stabilisator des roten Eckpunktes enthält die zu D_4 isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$, die F_0 erhält. Da $|D_4| = 8$ und, da das Bild des roten Eckpunkts aus sechs Punkten besteht, folgt wegen

$$|\,\mathrm{Sym}(W)| = |\mathrm{Orbit}_{\mathrm{Sym}(W)}(\textcolor{red}{\bullet})| \cdot |\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(W)}(\textcolor{red}{\bullet})|$$

  dass $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(W)}(\textcolor{red}{\bullet}) \cong D_4$.
- Mit einem Zählargument wie oben erhalten wir $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(W)}(\textcolor{green}{\bullet}) \cong S_3$, die Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$, die den grünen Punkt fixiert und die anliegenden Kanten permutiert.
- Es gilt $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(W)}(\textcolor{blue}{\bullet}) \cong C_2 \times C_2$, denn der Stabilisator besteht aus den Spiegelungen an den beiden Symmetrieebenen von W, die durch p verlaufen.
- Der Stabilisator eines Punktes von einer der gelben oder der organgenen Seite hat Ordnung 2, denn er wird von der Spiegelung an der Symmetrieebene von W durch die entsprechende Seite erzeugt. Die beiden gelben Seiten haben den gleichen Orbittyp: Das gelbe Kantensegment kann etwa durch eine Symmetrie von W etwa auf ein Kantensegment abgebildet werden, dass in der Symmetrieebene des gelben Seitenflächendiagonalsegments liegt. Allerdings wird keiner der Punkte des orangenen Segments durch eine Symmetrie auf einen Punkt in dieser Ebene abgebildet. Daher haben diese Punkte einen anderen Orbittyp.

– Der Stabilisator eines Punktes aus dem Inneren von A ist trivial, ähnlich zu Aufgabe 2.

(iv) Ja. Es sei p der Mittelpunkt einer Seitenfläche F, etwa $\bullet$, und s die Symmetrieachse von W orthogonal zu p. Betrachte die Untergruppe H der Ordnung 4 von $\mathrm{Sym}(W)$, die von der Rotation r um s um 90° erzeugt wird: $H = \{r, r^2, r^3, r^4 = \mathrm{id}\}$. Die einzigen Fixpunkte von H in W sind p und der Mittelpunkt der F gegenüberliegenden Seitenfläche. Der Stabilisator von p in $\mathrm{Sym}(W)$ enthält aber zusätzlich die Spiegelungen an den Symmetrieebenen durch p orthogonal zu F. In der Tat gilt $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(W)}(p) \cong D_4 \gneqq H$. Also ist H nicht gleich dem Stabilisator eines Punktes in W.