Serie 6

Aufgabe 1

Es sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *normal*, falls $H = g^{-1}Hg$ für alle $g \in G$. Zwei Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$ heißen *konjugiert*, falls ein $g \in G$ existiert, sodass $H_1 = g^{-1}H_2 g$.

(i) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$ der Translationen in $\mathbb{R}^n$ normal in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass alle Stabilisatoregruppen $\mathrm{Isom}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{R}^n$, zueinander konjugiert sind.

Lösung

(i) Gemäß Vorlesung kann jede Isometrie $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ als Verknüpfung einer Isometrie $A \in \mathrm{O}(n) = \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n)$ und einer Translation T geschrieben werden, etwa $\varphi = A \circ T$. Dann gilt $\varphi^{-1} = T^{-1} \circ A^{-1}$. Ist nun $S \in \mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Translation, so gilt

$$\varphi S \varphi^{-1} = A \circ T \circ S \circ T^{-1} \circ A^{-1} = A \circ S \circ A^{-1}$$

da Translationen kommutieren. Ist nun S die Translation um den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so ist $A \circ S \circ A^{-1}$ die Translation um den Vektor $Av \in \mathbb{R}^n$, denn es gilt $A \circ S \circ A^{-1}(x) = A(A^{-1}x + v) = x + Av$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da A gemäß Vorlesung linear ist.

(ii) Betrachte die natürliche Operation der Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{R}^n$. Diese Operation hat genau einen Orbit, da beispielsweise $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$. Nach Aufgabe 5.3 sind demnach $\mathrm{Isom}_p(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{Isom}_q(\mathbb{R}^n)$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$ konjugiert, realisiert etwa durch Translationen.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die von allen Punktspiegelungen an Punkten in $\mathbb{R}^2$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

Lösung

Es seien p_1, p_2 zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$ und S_{p_i} die zu p_i gehörige Punktspiegelung. Wir sehen, dass die Verknüpfung $S_{p_2} \circ S_{p_1}$ eine Translation ist: Es gilt

$$S_{p_2} \circ S_{p_1} = T_v.$$

für den Vektor $v = 2(p_2 - p_1)$. Zudem lässt sich jede Punktspiegelung S_p um einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ darstellen als

$$S_p = T_p \circ S_0 \circ T_{-p}.$$

wobei, T_p, T_{-p} Translationen um die Vektoren $p, -p$ sind und S_0 die Punktspiegelung am Ursprung. Diese beiden Überlegungen führen dazu, dass die Untergruppe $U < \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, die durch $\{S_p \mid p \in \mathbb{R}^2\}$ erzeugt wird, ebenfalls durch $\{S_0, T_v \mid v \in \mathbb{R}^2\}$ erzeugt wird. Da $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$ nach Aufgabe 1 (i) normal in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ist, kann jedes Element in U als T_w oder $S_0 \circ T_w$ für ein $w \in \mathbb{R}^n$ geschrieben werden.

Aufgabe 3

Zeigen Sie (rein geometrisch), dass die Verknüpfung zweier Drehungen von $\mathbb{R}^3$ um Achsen, die sich in einem Punkt schneiden, wieder eine Drehung ist.

Hinweis: Man betrachte die Ebene E bestimmt durch die Drehachsen der beiden Drehungen und faktorisiere jede Drehung als das Produkt zweier Spiegelungen.

Lösung

Es seien φ_1, φ_2 Drehungen mit Drehachsen l_1, l_2, die sich in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ schneiden. Falls l_1 und l_2 identisch sind, ist die Aussage klar. Wir können daher annehmen, dass l_1 und l_2 verschieden sind. Es seien α_1, α_2 die Drehwinkel von φ_1 und φ_2. Wir betrachten die Ebene E, die durch l_1 und l_2 verläuft, sowie die Ebenen E_1, E_2, die durch l_1 beziehungsweise l_2 verlaufen und mit E die Winkel $\alpha_1/2$ beziehungsweise $\alpha_2/2$ in Dreh- beziehungsweise Gegendrehrichtung einschließen. Es seien s, s_1 und s_2 die Spiegelungen an E, E_1 und E_2. Dann gilt $\varphi_1 = s \circ s_1$ sowie $\varphi_2 = s_2 \circ s$ und

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 = s_2 \circ s \circ s \circ s_1 = s_2 \circ s_1,$$

eine Drehung an der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

Aufgabe 4

Gemäß Vorlesung kann jede Isometrie der Ebene als Verknüpfung von höchstens drei Spiegelungen geschrieben werden. Zeigen Sie: Falls $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ eine Verknüpfung von genau zwei Geradenpiegelungen ist, dann ist φ genau dann eine Rotation, wenn φ einen Fixpunkt hat.

Lösung

Es sei $\varphi = s \circ s'$ die Verknüpfung zweier Spiegelungen. Wir unterscheiden zwei Fälle: Falls die Spiegelachsen von s, s' parallel aber verschieden sind, dann ist φ eine echte Translation. Andernfalls sind die Achsen entweder identisch, in welchem Fall φ die triviale Rotation ist, oder sie haben genau einen Schnittpunkt. In diesem Fall ist φ eine Rotation um diesen Punkt. Insgesamt ist φ genau dann eine Rotation, wenn es einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 5

Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wirkt auf der Ebene durch Translationen $T_{(m,n)}$ um ganzzahlige Distanzen m in die x- und n in die y-Richtung. Betrachten Sie die Gruppe G von Bewegungen der Ebene, die durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und die Gleitspiegelung $B : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)$ erzeugt wird.

(i) Es gilt $B \circ T_{(m,n)} = T_{(m,n)} \circ B'$ für ein $B' \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Bestimmen Sie B'.

(ii) Finden Sie alle Elemente von G.

(iii) Was ist der Index von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in G?

(iv) Finden Sie eine Schachbrettmusterung F von $\mathbb{R}^2$ (mit Formen oder Farben), sodass $\mathrm{Sym}(F) = G$. (Knörrer, Seiten 61-63.)

Lösung

(i) Es gilt $B' = T_{(m,n)}^{-1} \circ B \circ T_{(m,n)} = T_{(-m,-n)} \circ B \circ T_{(m,n)}$. Also

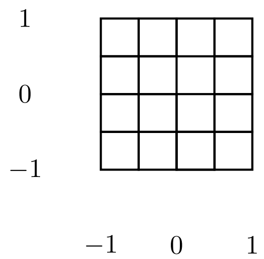
$$B' : (x, y) \mapsto (x+m, y+n) \mapsto \left(x + m + \frac{1}{2}, -y - n\right) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}, -y - 2n\right).$$

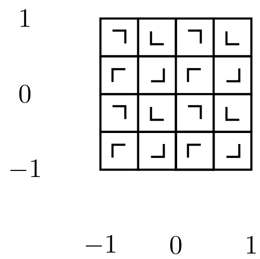
Mit anderen Worten, $B' = T_{(0,-2n)} \circ B$.

(ii) Jedes Element von G ist eine Verknüpfung der $T_{(m,n)}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, B und B^{-1}. Es gilt $B^2 = T_{(1,0)}$ und daher $B^{-1} = B \circ T_{(-1,0)}$. Außerdem ist $B' = T_{(0,-2n)} \circ B$. Zusammen mit Teil (i), kann daher jedes Element von G in der Form T oder $T \circ B$ für ein T aus $\{T_{(m,n)} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ geschrieben werden. Umgekehrt sind alle diese per Definition in G enthalten. Also $G = \{T_{(m,n)} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{T_{(m,n)} \circ B \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) Nach Teil (ii) gilt $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \sqcup (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})B$. Also hat $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Index 2 in G.

(iv) Wir beginnen mit einer Figur, deren Symmetriegruppe alle ganzzahligen Translationen und B enthält, z.B. ein halb-ganzzahliges Gitter.





Versehen wir nun jedes Kästchen mit einem Ornament in geeigneter Orientierung, so schließen wir die Rotationen und Spiegelungen, die Symmetrien der ersten Figur sind, aus, aber erlauben weiterhin ganzzahlige Translationen sowie B. Eine genaue Argumentation erfordert die Klassifikation der Isometrien der Ebene.