

Geometrie

Prof. Richard Pink

Vorlesungsskript
Herbstsemester 2011
ETH Zürich

15. Februar 2012

Inhalt

1	Vorbemerkungen	3
2	Hilberts Axiome der euklidischen Ebene	17
3	Inzidenz und Lage	19
4	Kongruenz	30
5	Parallelen	37
6	Angeordnete Körper	40
7	Koordinaten	45
8	Bewegungen	52
9	Der projektive Raum	65
10	Möbius-Transformationen	71
11	Die hyperbolische Ebene	78
	Literatur	88

Dank

Für Korrekturen an früheren Versionen des Skripts möchte ich mich bedanken bei dem Vorlesungsassistenten Jakob Ditchen und verschiedenen Hörerinnen und Hörern der Vorlesung sowie bei Andrin Schmidt. Die rund 70 Abbildungen hat Hedi Oehler mit dem Programm `xfig` erstellt; auch ihr gebührt mein herzlicher Dank für ihre wertvolle Unterstützung.

Zürich, den 15. Februar 2012

Richard Pink

1 Vorbemerkungen

Einordnung der Vorlesung:

Die Vorlesung Geometrie ist ausgerichtet auf Studierende des 1. Semesters im Studiengang Mathematik, kann aber auch von anderen besucht werden.

In den Anfängervorlesungen Analysis und Lineare Algebra erwerben Sie Grundbegriffe, auf denen fast alle weitere Mathematik aufbaut; deshalb sind diese Vorlesungen obligatorisch. Die Vorlesung Geometrie war an der ETH Zürich früher ebenfalls obligatorisch, ist es aber im Bachelorstudiengang nicht mehr. Ohnehin wird an den meisten deutschsprachigen Hochschulen gar keine vergleichbare Vorlesung angeboten. Warum?

Die reine Mathematik wird klassischerweise eingeteilt in Analysis, Algebra und Geometrie. (Die Zahlentheorie ordnet man unter Algebra ein, wenn man sie als „Königin der Mathematik“ nicht separat nennen möchte.) Das Verschwinden der Geometrie als Grundlage hat damit zu tun, dass man Geometrie heute meist mit algebraischen und analytischen Methoden betreibt, indem man Punkte durch ihre Koordinaten in geeigneten Koordinatensystemen beschreibt und alles in Termen von (reellen) Zahlen ausdrückt. Damit werden Analysis und Algebra zu Grundlagen für die Geometrie, anstatt umgekehrt, wie einst. Zum Beispiel ist lineare Algebra ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Kegelschnitten, und Analysis wie Algebra sind unverzichtbare Voraussetzungen für das Studium der Geometrie von Mannigfaltigkeiten.

Die Vorlesung Geometrie hat man an der ETH Zürich aus zwei Gründen beibehalten. Einerseits möchte man, dass Kenntnisse der Geometrie in der genannten Dreiteilung nicht unter den Tisch fallen. Andererseits soll die Vorlesung als fakultative Ergänzung zu den obligatorischen Vorlesungen einen Rahmen bieten, in dem man Grundfähigkeiten (logisches Schliessen, axiomatische Methode, usw.) anhand eines weiteren Stoffes einüben kann. Dafür braucht die Vorlesung keinen Standardkanon; sie kann sich von Jahr zu Jahr und von Dozent zu Dozentin deutlich unterscheiden.

Vorgesehene Themen:

Die jetzige Vorlesung umfasst zwei Stunden pro Woche. Die meisten Lehrbücher zur Geometrie (wie z.B. das von Horst Knörrer) würden dagegen einem intensiveren Kurs entsprechen. Ich will das Hauptaugenmerk auf die axiomatische Methode legen und werde daher andere Aspekte wie z.B. Kegelschnitte und Symmetriegruppen beiseite lassen. Darum kann ich im Augenblick kein einzelnes Lehrbuch als Begleitung zur Vorlesung empfehlen, sondern werde später einzelne Literaturverweise angeben.

Nach einigen Vorbemerkungen zur formalen Sprache der Mathematik und zum Gebrauch von logischen Symbolen werden wir uns kurz Euklids Werk „Elemente“ anschauen und dann die ebene euklidische Geometrie in der modernen axiomatischen Formulierung nach Hilbert studieren. Eine besondere Rolle spielt darin das sogenannte Parallelenaxiom. Dieses besagt, dass es für jede Gerade und jeden Punkt ausserhalb dieser Geraden genau eine Gerade durch diesen Punkt gibt, die zu der gegebenen Geraden parallel ist. Bekanntlich haben sich die Mathematiker jahrhundertlang mit

der Frage beschäftigt, ob dieses Axiom aus den anderen folgt oder nicht. Schliesslich hat man im 19. Jahrhundert festgestellt, dass es nicht folgt und dass es interessante nicht-euklidische Geometrien gibt, in welchen alle übrigen Axiome Euklids gelten, das Parallelenaxiom aber nicht. Als Hauptbeispiel dafür werden wir die ebene hyperbolische Geometrie studieren. Sie verhält sich zur euklidischen Geometrie ähnlich wie die sphärische Geometrie, die man auf der Oberfläche einer Kugel hat, zum Beispiel auf der idealisierten Erdoberfläche. Schliesslich möchte ich mich mit ebener projektiver Geometrie befassen sowie mit dem Zusammenhang jeder dieser Arten von Geometrie mit Koordinatensystemen. Ich weiss aber nicht, ob ich alle diese Themen in der kurzen Zeit abdecken kann. Was ich nicht schaffe, werde ich eben weglassen.

Mathematik zwischen Formalismus und Anschauung:

Ich möchte mit einigen allgemeinen Bemerkungen zur Sprache der Mathematik beginnen und auf Aspekte aufmerksam machen, die ich als besonders wichtig ansehe. Mathematik zu treiben bedeutet generell, mathematische Objekte wie Zahlen, Funktionen, Gleichungen, Ungleichungen, Mengen, Räume, Gruppen und viele weitere zu untersuchen, also wichtige Fragen über diese Objekte zu beantworten und interessante Sätze über sie zu beweisen, aber auch neue Theorien zu entwickeln für vorher noch nicht untersuchte Objekte, ... sicher müsste man diese Liste fortsetzen. All dies spielt sich immer gleichzeitig auf zwei Ebenen ab: der formalen Ebene und der Ebene der abstrakten Anschauung.

Auf der formalen Ebene drücken wir mathematische Sachverhalte aus, indem wir logische und mathematische Symbole zu Formeln verbinden, und führen Beweise, indem wir aus Aussagen, die wir bereits als wahr erkannt haben, durch Anwendung strenger logischer Gesetze neue wahre Aussagen herleiten. Diese Ebene entspricht derjenigen eines Computerprogramms. Ein Programm, das ein Computer ausführen kann, muss strengen syntaktischen und semantischen Regeln gehorchen. Der Computer kann nicht erraten, was der Autor meint, wenn ein wesentliches Detail fehlt, und kann es nicht korrigieren, wenn der Autor etwas Falsches geschrieben hat; und Einwände der Art, es sei natürlich so oder so gemeint gewesen, lässt er nicht gelten. Die formale Sprache der Mathematik ist genauso stringent. Von Mathematikern wird verlangt, dass sie alles, was sie sagen, korrekt und vollständig und unmissverständlich mit allen notwendigen Details auf der formalen Ebene ausdrücken und begründen können. Dies zu lernen und zu üben wird vor allem jetzt im Basisjahr von Ihnen erwartet.

Gleichzeitig wollen wir als Menschen die Welt, also auch die Welt der Mathematik, verstehen und unsere Erkenntnisse darüber anderen Menschen mitteilen. Dazu brauchen wir eine abstrakte Anschauung für die mathematischen Objekte, mit denen wir arbeiten. Wir brauchen ein Verständnis jenseits der formalen Ebene, um erkennen zu können, was wichtig oder unwichtig, nützlich oder unnützlich, interessant oder langweilig ist, also um die irrsinnige Menge an Formeln überhaupt zu überblicken und uns beim Umgang damit in die richtige Richtung leiten zu lassen. Wir brauchen dieses Verständnis auch, um zu wissen, welche mathematischen Theorien wir in welcher Situation ausserhalb der Mathematik anwenden können.

Fast jede Kommunikation in der Mathematik erfolgt gleichzeitig auf beiden Ebenen. Wenn ich zum Beispiel in der Geometrie sage: „Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte“, so ist das einerseits das sprachliche Äquivalent der formalen Aussage „ $\forall g \in \mathcal{G} \exists P \in g \exists Q \in g : P \neq Q$ “, wenn \mathcal{G} die Menge aller Geraden bezeichnet. Andererseits haben wir dabei eine Vorstellung davon, was ein Punkt und eine Gerade sei und was es bedeutet, ob zwei Punkte gleich oder verschieden sind, und dadurch bekommt die Aussage für uns eine anschauliche Bedeutung. Für den Formalismus ist diese Bedeutung irrelevant, für uns Menschen aber nicht. Wir Menschen können Mathematik nur betreiben, indem wir uns gleichzeitig auf beiden Ebenen bewegen. Wir können weder rein auf der formalen Ebene operieren, weil wir dann nichts verstünden, noch allein auf der Anschauungsebene, weil wir dann nichts beweisen und somit als wahr oder falsch erkennen könnten.

Nebenbei gesagt ist es grundsätzlich immer möglich und erlaubt, einen mathematischen Formalismus mit einer anderen als der ursprünglich vorgesehenen Anschauung zu versehen. Wenn wir zum Beispiel die Menge aller Schuhschachteln \mathcal{G} nennen und jedes Element $g \in \mathcal{G}$ eine Menge von Schuhen ist, dann bedeutet die oben genannte formale Aussage, dass jede Schuhschachtel mindestens zwei verschiedene Schuhe enthält. Das ist völlig in Ordnung, soweit auch die weiteren postulierten Eigenschaften der Theorie in der neuen Interpretation gelten (was in diesem Beispiel allerdings zweifelhaft erscheint).

Um uns frei auf beiden Ebenen bewegen zu können, müssen wir dazu fähig sein, nach Belieben von der einen auf die andere zu wechseln. Das heisst: Wir müssen alles in die jeweils andere Ebene übersetzen können. Was immer wir auf deutsch, englisch, oder sonst einer natürlichen Sprache sagen, müssen wir auch in mathematischen Formeln ausdrücken können. Umgekehrt sollten wir uns selbst genauso wie anderen stets erklären können, was eine gegebene Formel anschaulich bedeutet. Beides müssen wir ständig praktizieren, während wir mathematische Gedanken entwickeln, aber insbesondere auch auf Nachfrage dann, wenn wir jemand anderem unsere Gedanken mündlich oder schriftlich mitteilen wollen und uns der Adressat um die Übersetzung bittet, damit er genau versteht, was wir meinen. Das ist eine der wichtigsten Grundfähigkeiten, die Sie erwerben sollen. Mängel an dieser Stelle sind oft ein Haupthindernis gegen ein erfolgreiches Mathematikstudium, und darum sollten Sie diese Fähigkeit vor allem im Basisjahr ausführlich einüben.

Sie werden erleben, dass wir zwar zu Beginn sehr auf formale Genauigkeit und Vollständigkeit pochen, dies aber bald reduzieren und uns viele explizite und implizite Abkürzungen erlauben. Das liegt daran, dass die Welt der Mathematik so reichhaltig und komplex ist, dass wir gar nicht dazu in der Lage sind, stets alles so vollständig auszudrücken, wie es die anerkannten Regeln eigentlich erfordern würden. Unsere formalen Aussagen sind also leider oft nicht ganz vollständig, und sogar den besten Mathematikern unterlaufen gelegentliche Irrtümer und sie schreiben formal etwas anderes, als sie tatsächlich meinen. Auch Dozenten von Anfängervorlesungen können keine Vollständigkeit erreichen, schon allein, weil wir gar nicht die Zeit haben, alles auf der formalen Ebene vollständig auszuschreiben. Das wird Ihnen das Verständnis des Stoffs erschweren, bis Sie etwas mehr mathematische Reife entwickelt haben.

Dazu baut der meiste Stoff in der Mathematik auf anderem, davor besprochenem Stoff auf. Dieser wird als bekannt und selbstverständlich vorausgesetzt und nicht weiter diskutiert. Mathematik auf hohem Niveau zu verstehen ist vergleichbar damit, die Funktionsweise eines komplexen elektronischen Geräts wie z.B. eines Handys zu verstehen. Dieses besteht aus verschiedenen Einzelteilen, darunter einem Mikroprozessor, der aus Modulen mit verschiedenen Aufgaben besteht, welche auf bestimmte Weise miteinander interagieren und wiederum in kleinere Einheiten unterteilt sind, bis hin zu Flip-Flops, welche selbst wieder aus einzelnen Transistoren und Widerständen zusammengesetzt sind; daneben läuft auf diesem Mikroprozessor ein Programm, welches ebenfalls eine geschachtelte Struktur hat, usw. Die Grundlage der elektronischen Bauteile und deren Verdrahtung kann man als Analogon der formalen Ebene der Mathematik, das Interagieren der Module auf den höheren Ebenen als Analogon der Anschauungsebene interpretieren. Genauso entsprechen die einzelnen Befehle des Programms in Maschinensprache der formalen Ebene, seine Gesamtstruktur dagegen der Anschauungsebene der Mathematik. Die Funktionsweise des Geräts als Ganzes kann man nur vollständig erfassen, wenn man auf jeder dieser Komplexitätsebenen Bescheid weiss. Nicht mehr und nicht weniger als das Entsprechende in der Mathematik wird von Ihnen erwartet.

Fast jede mathematische Mitteilung ist also sowohl formal unvollständig als auch darin, dass sie andere Begriffe als bekannt voraussetzt. Die Lösung dieses Problems besteht darin, dass man von Mathematikern erwartet, dass sie alles, was sie sagen, auf Nachfrage hin präziser und vollständiger ausdrücken und erklären und die verwendeten Grundlagen ergänzen können. Auch von Ihnen wird erwartet, dass Sie alles, was Sie lernen, auf der formalen und der Anschauungsebene vollständig erfassen. Solange Sie nicht sicher sind, dass Sie das tun, müssen Sie eben nachfragen, und sollen das auch. Hier kommt es wesentlich auf Ihre eigene Initiative an. Auf Ihre Nachfrage hin erhalten Sie von uns entweder die gewünschten Details, oder Hinweise dazu, wie Sie sich diese Details selbst erarbeiten können.

In jedem Fall ist mathematische Erkenntnis ein aktiver Prozess. Wie beim Fahrradfahren-Lernen geht es darum, gewisse Abläufe so einzuüben, dass sie mit der Zeit automatisch werden. Dabei muss das Gehirn an bestimmten Stellen unverdrahtet werden, und das geschieht nur durch viel Übung und ständige aktive Mitarbeit. Dieser Prozess ist mit Teilerfolgen, aber auch Rückschlägen und Schmerzen verbunden, denn wie man beim Fahrradfahren-Lernen gelegentlich hinfällt, gehört es zur Mathematik, dass man manchmal Fehler begeht und sich dies von anderen sagen lassen muss. Daran muss man sich gewöhnen und es nicht überbewerten. Versuchen Sie zu erreichen, was die folgende Maxime besagt: Mathematiker zeichnen sich den meisten anderen Menschen gegenüber dadurch aus, dass sie sich darüber freuen, wenn man ihnen einen Denkfehler nachweist, weil sie den Erkenntnisgewinn höher bewerten als die damit verbundene Peinlichkeit. Dazu sollten Sie natürlich auch lernen, Ihre eigenen Aussagen ständig auf Korrektheit und Klarheit und Vollständigkeit zu überprüfen. Insgesamt erfordert mathematische Erkenntnis also eine erhebliche psychische Anstrengung, mit der man aber auch einen enormen Gewinn erzielen kann. Das ähnelt der physischen Anstrengung, die man braucht, um auf einen sehr hohen Berg steigen und dort die einzigartige

Aussicht geniessen und sich als einer von relativ wenigen Menschen sagen zu können: Das habe ich aus eigener Kraft getan.

Die Grobstruktur mathematischer Kommunikation:

Mathematische Kommunikation, ob mündlich oder schriftlich, folgt gewissen Regeln, im Grossen wie im Kleinen. Im Grossen geschieht Folgendes: Man führt mathematische Objekte ein, trifft Annahmen über sie und zieht schrittweise Folgerungen daraus, beweist also Sätze über sie. Die folgenden Aspekte sind dabei besonders wichtig:

Zuerst müssen die verwendeten Begriffe und Symbole erklärt werden, und zwar bevor man sie benutzt, sofern sie nicht zum gemeinsamen Standardrepertoire aller Beteiligten gehören. Genauso muss gesagt werden, aus welcher Menge die gebrauchten Variablen gewählt werden sollen. Ohne diese Erklärungen kann der Adressat nicht wissen, was gemeint ist. Es ist sehr lästig für diesen, nachfragen zu müssen, was denn damit und damit gemeint sei. Eine vernünftige mathematische Mitteilung beginnt daher oft mit einer Einleitung der Art: „Sei ... ein ... mit der Eigenschaft ..., und sei ...“

Die Variablendeklaration funktioniert genau wie in einer höheren Programmiersprache. Dort hat man die Möglichkeit, Variablen mit einem wohldefinierten Gültigkeitsbereich zu deklarieren, zum Beispiel in einem Unterprogramm. Wie in der Mathematik muss man dort zuerst sagen, welcher Art die Variable sein soll, bevor man sie verwenden darf. (Gewisse ältere Programmiersprachen, die implizite Konventionen für Variablennamen erlauben, verleiten zu Fehlern und sollten heute nicht mehr benutzt werden.) In der Mathematik definiert jeder Quantor einen Gültigkeitsbereich für die quantifizierte Variable, ausserhalb dessen die Variable entweder keinen Sinn ergibt oder, falls sie vorher schon eine Bedeutung hatte, so nimmt sie diese nach Ende des Gültigkeitsbereichs des Quantors wieder an, unabhängig von allem, was während der Gültigkeit des Quantors geschah. Ein Beweis ist wie ein Unterprogramm; was innerhalb eines Beweises eingeführt worden ist, ergibt ausserhalb keinen Sinn.

Wichtig ist, dass Anfang und Ende von Unterstrukturen deutlich markiert werden. Wie für Klammerungen in mathematischen Formeln, insbesondere für Quantoren, muss klar sein, wo eine Definition beginnt und endet, wo ein Satz beginnt und endet, wo ein Beweis beginnt und endet. Der Standard ist auch, dass man das Ende eines Beweises, an dem man also erklärt, dass eine vorher angegebene Behauptung nun bewiesen sei, besonders markiert. Das kann man mit Worten tun wie z.B. „was zu beweisen war“, oder entsprechend lateinisch „quod erat demonstrandum“, meist abgekürzt zu „q.e.d.“, oder ähnlichem. Üblich ist auch das Symbol „□“, der Übersichtlichkeit halber oft am rechten Rand des Textes, wie am Ende des vorliegenden Absatzes. Wenn man dieses Symbol verwendet, so sollte man es aber korrekt tun und nicht etwa als Zeichen für „irgendetwas endet hier“: □

Kleine, mittlere, und grosse Sätze unterscheidet man wie folgt: Einen zentralen Satz einer Theorie nennt man oft Hauptsatz. Das Wort Theorem entspricht dem englischen und französischen Wort für Satz; im deutschen wird es oft für einen grossen Satz verwendet. Einen mittleren oder kleinen Satz, dessen Aussage man im Rahmen der zu entwickelnden Theorie für relevant hält und später weiter zu benutzen gedenkt, nennt

man oft Proposition. Das ist lateinisch für Behauptung, das deutsche Wort Behauptung benutzt man jedoch in der Regel nur für eine Zwischenbehauptung innerhalb eines Beweises, für welche man sich ausserhalb des Beweises nicht mehr interessiert. Ein Korollar oder eine Folge ist ein Satz, der mit wenig Aufwand aus einem grösseren Satz folgt. Ein Lemma ist ein kleiner Satz, der dazu dient, eine Proposition oder einen Satz zu beweisen, der aber nicht selbst von Interesse ist. Ein Lemma, das nur dazu dient, ein anderes Lemma zu beweisen, heisst Sublemma. Ein Lemma kann für sich alleine oder innerhalb eines Beweises auftreten. Oft enthält es eine mehr oder weniger hässliche formale Aussage im Rahmen einer Rechnung, wogegen der dazugehörige grössere Satz eine griffigere strukturelle Eigenschaft ausdrückt. Wenn man einen mathematischen Text überfliegt, orientiert man sich vor allem an den Definitionen und grösseren Sätzen und lässt Beweise und Lemmata beim ersten Durchgang oft ganz beiseite. Gelegentlich hat man im Nachhinein festgestellt, dass ein ursprünglich als Lemma ausgedrückter Sachverhalt doch eine fundamentale Bedeutung hat. Als man darauf das Lemma zu einem Satz befördern wollte, hatte sich die Bezeichnung Lemma schon eingebürgert, und darum behielt man sie bei. Ein typisches Beispiel dafür ist das Zornsche Lemma.

Formal gesehen ist ein Beweis eine endliche Folge von Aussagen, von denen jede entweder ein Axiom oder eine früher bewiesene Aussage ist oder mittels einer Schlussregel aus im Beweis davor stehenden Aussagen folgt, so dass die letzte Aussage des Beweises die zu beweisende Aussage ist. Zum vollständigen Aufschrieb eines Beweises gehört, für jede Aussage zu erklären, wieso sie gilt. Wenn zum Beispiel eine Aussage direkt aus der unmittelbar vorhergehenden folgt, so kann man dies mit einem Doppelpfeil \Rightarrow anzeigen. Wenn dabei noch eine bestimmte Grundeigenschaft oder ein Satz der Theorie benutzt wird, so muss man dies ebenfalls erwähnen. Wenn eine Aussage aus einer früheren Aussage oder einer Kombination von solchen folgt, so muss man auch dies irgendwie aufzeigen. Ein verständlicher Beweis ist also nicht eine blosser Folge von Aussagen oder Formeln, sondern erfordert für jeden Schritt eine Begründung. Sonst ist er lückenhaft und wird zu Recht nicht akzeptiert. Genauso ist eine Berechnung, zum Beispiel eines Integrals, nicht bloss eine Folge von Umformungen einer mathematischen Formel, sondern eine Folge von Umformungen mit jeweiligen Begründungen.

Vorbilder:

Zu Beginn versuchen wir in den Vorlesungen, jeden elementaren Rechen- und Beweisschritt auszuschreiben und zu begründen. Das Gleiche verlangen wir von Ihnen in den Übungsaufgaben. Das verlangen wir auch dann noch, wenn wir in der Vorlesung schon längst aus Zeitgründen damit begonnen haben, bestimmte Details zu überschlagen. Denn als Mathematiker/innen im Werden müssen Sie diese Grundlagen noch lange üben, bis sie für Sie selbstverständlich geworden sind. Sie müssen erst noch das richtige Gefühl dafür entwickeln, welche Details wichtig und welche weniger wichtig sind. Darum sind in den Übungsaufgaben, und natürlich genauso in den Klausuren, grundsätzlich alle Details aufzuschreiben und alle Begründungen explizit anzugeben.

Gute Vorbilder dafür finden Sie in vielen Skripten und Lehrbüchern, aber nicht notwendigerweise in allen. In meinen eigenen Vorlesungen bestehe ich darauf, dass die Musterlösungen der Übungsaufgaben mustergültig sind, aber auch das ist nicht über-

all so. Am besten ist es, Sie bilden sich selbst eine fundierte Meinung darüber, was für Sie mustergültig ist und was nicht. Vielleicht wählen Sie sich ein Vorbild und versuchen ihm nahezukommen, denken aber auch später einmal daran zu überprüfen, ob Sie nicht noch andere Vorbilder finden. Auf höherem Niveau sind die renommiertesten Fachzeitschriften in der Regel gute Vorbilder.

Trotz unvermeidbarer Lücken hoffe ich, dass auch der Inhalt meiner Vorlesung diesen Anforderungen entspricht und Vorbildcharakter hat. Jedoch wird mein Tafelanschrieb allein keineswegs vorbildlich sein. Denn vieles, was ich mündlich dazu sage und was auch wichtig ist, werde ich aus Zeitgründen nicht anschreiben. Insbesondere werde ich viele Begründungen nur mündlich angeben. Darum wird es auch nicht ausreichen, dass Sie nur den Tafelanschrieb kopieren, sondern Sie sollten sich die wichtigsten mündlichen Nebenbemerkungen ebenfalls merken.

Die Sprache der Prädikatenlogik:

Mathematische Formeln bestehen im Innern aus Konstanten, Variablen, Funktionen und Relationen. Mit diesen Symbolen kann man Aussagen wie $1 + 1 = 2$ und $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ausdrücken. Solche einzelnen Aussagen werden verbunden mit den logischen Symbolen ‘und’ \wedge , ‘oder’ \vee , ‘nicht’ \neg , ‘impliziert’ \rightarrow , ‘dann und nur dann, wenn’ oder ‘genau dann, wenn’ \leftrightarrow , sowie den Quantoren ‘für alle’ \forall und ‘es existiert’ \exists . Der etwas weniger allgemeingebäuchliche Quantor $\exists!$ bedeutet ‘es existiert ein und nur ein’ oder ‘es existiert genau ein’. Klammern der Form (\dots) oder $[\dots]$ dienen dazu, Teilformeln zusammenzufassen und eindeutig festzulegen, wie sie als Teil einer grösseren Formel aufzufassen sind. Gelegentlich haben sie wie Mengenklammern $\{\dots\}$ auch spezielle Bedeutungen.

Ein Quantor bezieht sich immer auf eine nachfolgende Aussage; zum Beispiel steht „ $\exists x C(x)$ “ für „Es existiert ein x mit der Eigenschaft $C(x)$ “. Meist schreibt man „ $\forall x \in X : C(x)$ “ als Abkürzung für „ $\forall x : (x \in X) \rightarrow C(x)$ “ und „ $\exists x \in X : C(x)$ “ als Abkürzung für „ $\exists x : (x \in X) \wedge C(x)$ “ und analog für $\exists!$. Der Doppelpunkt dient hier nur dazu, verschiedene Formelteile besser auseinanderhalten zu können, und hat keine weitere mathematische Bedeutung. Einen Doppelpunkt oder senkrechten Strich benutzt man auch, um durch eine Eigenschaft eine Teilmenge einer Menge zu spezifizieren in der Form $\{x \in X : C(x)\} = \{x \in X \mid C(x)\}$. Für Zuweisungen verwendet man das Symbol $:=$, wobei der Doppelpunkt stets auf der Seite des Symbols steht, dem die andere Seite als Wert zugewiesen wird, wie in $x := 2$.

Die Implikation $A \rightarrow B$ als Teil einer mathematischen Formel ist zu unterscheiden von der Folgerung „Wenn A gilt, dann gilt B “ oder der Begründung „Da A gilt, folgt B “ als Teil der natürlichen menschlichen Sprache. In letzteren beiden Fällen behauptet man die Folgerung aufgrund eines inneren Zusammenhangs zwischen den Aussagen A und B . Solche Folgerungen ziehen wir oft im normalen Leben und ständig, wenn wir Mathematik betreiben. Sie sind nicht als Teil von Formeln anzusehen, sondern erklären die Beziehung zwischen verschiedenen Formeln.

Bei der Implikation $A \rightarrow B$ als Teil einer mathematischen oder logischen Formel wird dagegen kein innerer Zusammenhang zwischen A und B verlangt, schon weil man gar

nicht formal spezifizieren kann, was das genau bedeuten soll. Stattdessen sieht man die Implikation einfach dann als wahr an, wenn B wahr ist oder wenn A falsch ist, und als falsch nur dann, wenn B falsch ist und A wahr. Insbesondere kann die Implikation den Wahrheitswert „falsch“ annehmen und beliebig als Teil einer grösseren Formel auftreten.

Entsprechendes gilt für die Beziehung zwischen der Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ als Teil einer Formel und Aussagen der Form „ A gilt dann und nur dann, wenn B gilt“ in der natürlichen Sprache.

Natürlich führt das zu einer gewissen Verwirrung. Experten der mathematischen Logik empfehlen, Implikation und Äquivalenz als Teile von Formeln mit einfachen Pfeilen zu bezeichnen, solche ausserhalb dagegen mit den Doppelpfeilen \Rightarrow and \Leftrightarrow abzukürzen. Die Unterscheidung hat sich unter Mathematikern jedoch noch nicht durchgesetzt. Ich versuche dennoch in dieser Vorlesung, mich an die beschriebene Konvention zu halten.

Die vorigen Bemerkungen sind auch ein Beispiel dafür, dass man die Symbole der Prädikatenlogik nicht einfach als Abkürzung für Teile der natürlichen Sprache ansehen sollte. Ein weiteres Beispiel sind Quantoren. In einem natürlichen Satz ist es z.B. in Ordnung zu sagen, „dass $x - x = 0$ ist für alle reellen Zahlen x “. In diesem Fall steht die Quantifizierung „für alle x “ nach der quantifizierten Aussage „ $x - x = 0$ “; die Regeln der natürlichen Sprache sorgen dennoch dafür, dass wir in diesem wie in den meisten Fällen eindeutig verstehen, was gemeint ist. Im mathematischen Formalismus dagegen gelten strengere Regeln, aus guten Gründen. Wie für Computerprogramme hat man dort festgelegt, dass jeder Quantor vor der durch ihn quantifizierten Aussage stehen muss. Dadurch wird die Gültigkeit des Quantors eindeutig festgelegt für den Bereich von dem Quantor bis zum Ende der Formel oder der nächsten schliessenden Klammer, die zu einer vor dem Quantor stehenden öffnenden Klammer gehört. Ohne Beachtung dieser Regel käme man bald zu Formeln der Art „ $\exists x D(x, y) \forall y$ “, bei denen keine eindeutige logische Präzedenz der Quantoren mehr auszumachen ist. Die Beachtung der Regel macht dagegen den entscheidenden Unterschied zwischen Formeln deutlich, bei denen Quantoren vertauscht wurden, wie z.B. bei

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists w \in \mathbb{C} : w^2 = z \quad \text{gegenüber} \quad \exists w \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C} : w^2 = z.$$

Beim Umgang mit dem Allquantor \forall ist weiter zu bemerken — und das ist etwas gewöhnungsbedürftig — dass im Fall der leeren Menge $X = \emptyset$ jede Aussage der Form „ $\forall x \in X : C(x)$ “ wahr ist. Das liegt nicht etwa daran, dass die leere Menge doch irgendwelche Elemente hätte, sondern daran, dass die Aussage ja bedeutet „ $\forall x : (x \in X) \rightarrow C(x)$ “ und die Implikation „ $(x \in X) \rightarrow C(x)$ “ immer wahr ist, wenn die Voraussetzung „ $x \in X$ “ falsch ist. Dies gilt auch dann, wenn $C(x)$ eine von vorneherein absurde Aussage über x ist. Zum Beispiel ist die Aussage „Jedes Element der leeren Menge ist ein grosser grüner Bär, der sein eigener Vater ist,“ wahr.

Missverständnisse mit der leeren Menge können auch dadurch entstehen, dass man ihre Eigenschaften mit den Eigenschaften ihrer Elemente verwechselt. Zum Beispiel gibt es bekanntlich keine reelle Zahl x mit der Eigenschaft $x + 1 < x$. Dagegen gibt es durchaus eine Menge reeller Zahlen X mit der Eigenschaft $\forall x \in X : x + 1 < x$,

nämlich die leere Menge $X = \emptyset$. Um solche Verwechslungen zu vermeiden, sollte man sich stets genau überlegen, worauf sich ein Quantor bezieht und worauf nicht.

Man muss sich dessen bewusst sein, dass, wenn eine Menge X leer oder möglicherweise leer ist, uns dies nicht verbietet, über Elemente von X zu sprechen. Dass wir dies können und dürfen, ist sogar essentiell wichtig. Wenn wir zum Beispiel für alle Elemente x einer Menge X eine Aussage $C(x)$ beweisen wollen, so können wir dies oft durch einen Widerspruchsbeweis erreichen, indem wir annehmen, es gäbe ein Gegenbeispiel, das heisst, ein Element der Menge $X' := \{x \in X \mid \neg C(x)\}$. In diesem Fall versuchen wir zu zeigen, dass die Menge X' leer ist, indem wir die Eigenschaften eines hypothetischen Elements x erkunden und schliesslich zu einem Widerspruch führen. Wir sprechen also absichtlich über ein Element einer Menge, von der wir in Wirklichkeit hoffen, dass sie leer ist. Die Schlussfolgerungen, die wir dabei benutzen, werden ja nicht falsch, wenn die Anfangsvoraussetzung, es gäbe ein Element $x \in X'$, falsch ist; im Gegenteil, bei einer falschen Voraussetzung A wird eine Implikation $A \rightarrow B$, wie oben besprochen, ja erst recht richtig. Für mathematische Beweise, insbesondere für Widerspruchsbeweise, müssen wir also argumentieren können, ohne zu wissen, ob die Voraussetzungen überhaupt erfüllbar sind. Die Regeln darüber, wann zusammengesetzte Aussagen der Form $A \rightarrow B$ u.a. richtig sind, ermöglichen uns genau das.

Eine gute Übung für den Umgang mit dem mathematischen Formalismus besteht darin, beliebige Sätze der natürlichen Sprache in die Sprache der Prädikatenlogik zu übersetzen und umgekehrt. Wenn zum Beispiel X die Menge aller Menschen bezeichnet, so kann man die Aussage „Jeder Mensch hat einen Vater“ formal ausdrücken durch „ $\forall x \in X \exists y \in X : (y \text{ ist Vater von } x)$ “. Dass dieser Vater dann auch noch eindeutig ist, kann man ausdrücken durch „ $\forall x \in X \exists! y \in X : (y \text{ ist Vater von } x)$ “, oder ausgeschrieben durch

$$\forall x \in X \exists y \in X : (y \text{ ist Vater von } x) \wedge \forall z \in X : (z \text{ ist Vater von } x) \rightarrow z = y.$$

Üben Sie insbesondere den Umgang mit Implikationen und Quantoren. Ein weiteres Beispiel: Wenn ich sage: „Jedesmal, wenn ich Stöckelschuhe trage, fühle ich mich unsicher auf den Beinen“, so ist diese Aussage in meinem Fall nicht etwa deshalb richtig, weil ich zwar selten, aber eben doch manchmal Stöckelschuhe tragen und mich dann aus Mangel an Übung unsicher fühlen würde, sondern deshalb, weil ich es nie tue. Aus demselben Grund ist die Aussage „Jedesmal wenn ich Stöckelschuhe trage, habe ich einen Sechser im Lotto“ in meinem Fall wahr; trotzdem hatte ich leider noch nie einen Hauptgewinn.

Die Übersetzung zwischen natürlicher Sprache und Prädikatenlogik ist nie ganz eindeutig, und es ist auch eine gute Übung, verschiedene äquivalente Übersetzungen zu finden. Zum Beispiel ist die Implikation $A \rightarrow B$ äquivalent zu ihrem Kontrapositiv $\neg B \rightarrow \neg A$ sowie zu $\neg A \vee B$, die Aussage $\neg \exists x : C(x)$ ist äquivalent zu $\forall x : \neg C(x)$, die Aussage $\neg \forall x : C(x)$ ist äquivalent zu $\exists x : \neg C(x)$, und anderes mehr.

Widersprüche:

Ein berühmter Widerspruchsbeweis ist Russells Paradoxon. Ein Paradoxon ist ein vermeintlicher Widerspruch in einer Theorie. Eine Grundkonstruktion der Mengenlehre

besagt, dass man zu einer beliebigen formalen Eigenschaft $C(x)$ für Elemente x einer beliebigen Menge X eine Teilmenge $Y := \{x \in X \mid C(x)\}$ spezifizieren kann mit der Eigenschaft: $\forall x \in X : x \in Y \leftrightarrow C(x)$. Wenn wir dies akzeptieren, und es eine „Menge aller Mengen“ gäbe, so gäbe es auch eine Teilmenge davon, deren Elemente genau diejenigen Mengen sind, welche sich nicht selbst enthalten. Russells Paradoxon zeigt aber, dass es eine solche Menge nicht geben kann:

Satz: Es gibt keine Menge S mit der Eigenschaft, dass S genau diejenigen Mengen enthält, welche sich nicht selbst enthalten. In Symbolen, wenn M die Kollektion aller Mengen bezeichnet: $\neg \exists S \in M \forall X \in M : X \in S \leftrightarrow X \notin X$.

Beweis: Sei doch S eine Menge mit der genannten Eigenschaft. Dann können wir diese Eigenschaft insbesondere auf die Menge $X := S$ anwenden und erhalten die Folgerung $S \in S \leftrightarrow S \notin S$. Das bedeutet, dass die Aussage $S \in S$ wahr ist genau dann, wenn sie falsch ist. In jedem Fall ist diese Äquivalenz ein Widerspruch. Somit muss die Annahme, dass es eine solche Menge S gibt, falsch sein. **q.e.d.**

Russells Paradoxon hat zur Folge, dass man neue Mengen nicht allein durch Eigenschaften definieren kann wie in $\{x \mid C(x)\}$, sondern dass man bei der Konstruktion neuer Mengen immer irgendwie von bereits bekannten Mengen ausgehen muss wie z.B. in $\{x \in X \mid C(x)\}$ oder der Bildung von Potenzmengen. Die heute allgemein akzeptierten Axiome der Mengenlehre nach Zermelo und Fränkel leisten genau dies. Ob diese aber auf irgendeinem anderen Weg zu einem Widerspruch führen, wissen wir nicht. Aus einem fundamentalen Satz von Gödel folgt sogar, dass es gar nicht möglich ist, ihre Widerspruchsfreiheit zu beweisen, wenn sie denn widerspruchsfrei sind. Eine vollständige Klärung der logischen Grundlagen unserer Disziplin bleibt uns also endgültig verwehrt.

Wenn wir bei unserer mathematischen Tätigkeit auf einen Widerspruch stossen, ist es theoretisch immer möglich, dass dies ein Widerspruch ist, der das gesamte auf der Mengenlehre errichtete Gebäude der Mathematik zum Einsturz bringt. In der Praxis hat sich aber bisher jeder solche vermeintliche Widerspruch als Folge eines Irrtums herausgestellt.

Irrtümer:

Auch in der Mathematik liegt der Teufel im Detail, und die Möglichkeiten, Fehler zu begehen, sind grenzenlos. Ich will hier nur einige Fallen erwähnen, in die auch erfahrene Mathematiker immer wieder tappen.

Ein verbreiteter Irrtum besteht darin, mathematische Objekte ohne nachzudenken als verschieden anzusehen, wenn sie verschiedene Namen tragen. Dabei dürfen natürlich verschiedene Symbole dasselbe Objekt bezeichnen, genauso wie verschiedene Variablen denselben Wert annehmen dürfen. Wenn wir zum Beispiel sagen „Seien x und y reelle Zahlen“, so erlaubt dies selbstverständlich, dass sie gleich sind. Genauso schliesst die Aussage der Geometrie „Seien P und Q Punkte einer Geraden g “ die Möglichkeit $P = Q$ mit ein. Auch in Aussagen der Form „Für je zwei Elemente von ... gilt“ werden die Elemente nicht automatisch als verschieden vorausgesetzt, zum Beispiel wenn man sagt: „Für je zwei Elemente a und b einer Gruppe G existiert ein eindeutiges Element

x von G mit $ax = b$. Was man als verschieden voraussetzen will, muss man also zu Beginn klar benennen, um Mehrdeutigkeiten und Missverständnisse zu vermeiden. Sobald man eine Aussage in Formeln ausdrückt, wie in „ $\forall g \in \mathcal{G} \exists P \in g \exists Q \in g: P \neq Q$ “, wird meist klar, was gemeint ist.

Noch ein Beispiel dazu: Nach Definition hat jeder unitäre Ring R ein Nullelement 0_R und ein Einselement 1_R , und wenn man nicht aufpasst, nimmt man unbewusst an, dass diese verschieden seien. Dabei können sie durchaus gleich sein, nämlich für den Nullring. Wo man dies verbieten will, z.B. in den Axiomen für Körper, muss man es extra dazu sagen. Genauso neigt man generell dazu, sich jegliche mathematische Objekte als „nicht-trivial“ vorzustellen, also Mengen und Räume als nichtleer, Gruppen und Vektorräume und Ringe als aus mehr als einem Element bestehend, und so weiter.

Eine gute Vorkehrung gegen Irrtümer besteht daher darin, alle Aussagen anhand von Extrembeispielen zu testen. Zum Beispiel wende man eine Aussage über Mengen auf die leere Menge an, eine Aussage über Vektorräume auf den Nullraum, eine Aussage über Zahlen auf die Zahl 0, eine Aussage über Gruppen auf die Gruppe mit einem Element, usw., oder man betrachte eben den Fall, dass gegebene Objekte trotz verschiedener Bezeichnungen gleich sind.

Ein weiterer häufiger Denkfehler liegt darin, ein Objekt durch gewisse Eigenschaften zu charakterisieren und dann von „dem“ Objekt zu sprechen, ohne geklärt zu haben, ob es denn existiert und durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Vor allem die Eindeutigkeit wird leicht vergessen. Wenn wir zum Beispiel einen Vektorraum haben, so dürfen wir zwar eine Basis wählen und danach von „der“ (gewählten) Basis sprechen. Wir dürfen aber nicht einfach so von „der“ Basis sprechen, weil es im allgemeinen verschiedene gibt. Die korrekte Definition der Dimension eines Vektorraums lautet daher „die Kardinalität *einer* Basis“, und damit das wohldefiniert ist, muss man beweisen, dass eine Basis existiert und dass jede Basis dieselbe Kardinalität besitzt. Danach ist es in Ordnung, von „der“ Dimension des Vektorraums zu sprechen. Genauso sprechen wir erst dann von „dem“ Einselement einer Gruppe oder eines Körpers, wenn wir bewiesen haben, dass dieses eindeutig bestimmt ist; bis dahin müssen wir uns mit der Formulierung „ein Einselement“ begnügen.

Nach einer verbreiteten Konvention meint man mit „der“ Quadratwurzel einer nichtnegativen reellen Zahl x stets die eindeutige nichtnegative reelle Zahl y mit der Eigenschaft $y^2 = x$. Die Bezeichnung \sqrt{x} für diese ist durch ihre Eindeutigkeit gerechtfertigt. Für Quadratwurzeln von komplexen Zahlen existiert dagegen keine vernünftige Vorzeichenregel; darum darf man dort stets nur von „einer“ Quadratwurzel sprechen und muss zuerst eine geeignete wählen, bevor man mit dieser weiter arbeiten kann.

Noch ein Beispiel aus der ebenen Geometrie: Ein *Kreis* K ist definiert als die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt O einen gegebenen positiven Abstand r haben. Den Punkt O nennt man dann *Mittelpunkt* und die Zahl r *Radius von* K . Diese Definition alleine schliesst aber nicht aus, dass eine andere Wahl von O und r dieselbe Punktmenge K liefern kann. Bevor man geklärt hat, ob dies in einer gegebenen Geometrie der Fall ist, darf man daher nicht von „dem“ Mittelpunkt und „dem“ Radius eines Kreises sprechen, ohne solche extra gewählt zu haben.

Generell sollte man also stets auf eine saubere Formulierung achten und aufpassen, wo man den bestimmten Artikel und wo den unbestimmten Artikel verwendet.

Missverständnisse können entstehen, wo einander widersprechende Konventionen gebräuchlich sind. Allgemein akzeptiert ist, dass Zahlen $x > 0$ positiv und Zahlen $x \geq 0$ nichtnegativ heissen, also insbesondere, dass die Zahl 0 weder positiv noch negativ ist. Die Mehrheit der Mathematiker folgt der Konvention, dass die Bezeichnung $X \subset Y$ für eine Inklusion von Mengen auch die Gleichheit erlaubt, und schreiben $X \subsetneq Y$ oder $X \subsetneqq Y$ für eine echte Inklusion. Andere schreiben für ersteres sicherheitshalber $X \subseteq Y$; was sie dann mit $X \subset Y$ meinen, ist nicht immer klar. Völlig durcheinander geht der Gebrauch des Symbols \mathbb{N} für die Menge der natürlichen Zahlen: Für manche schliesst es die Zahl 0 mit ein, für andere nicht. Ich empfehle daher, das Symbol \mathbb{N} gar nicht erst zu verwenden, sondern stattdessen klarer $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ bzw. $\mathbb{Z}^{>0}$ zu schreiben. Meine persönliche Meinung ist, dass die natürlichen Zahlen die möglichen Kardinalitäten endlicher Mengen sind und daher mit der Kardinalität der leeren Menge, also mit 0 beginnen. In der mathematischen Logik ist das allgemein akzeptiert.

Viele Irrtümer beginnen mit Worten der Art „Offensichtlich gilt ...“ oder verstecken sich in Formulierungen wie „Das ist trivial“ oder „Man zeigt leicht, dass ...“. Viel zu oft übertünchen diese lediglich die Tatsache, dass es einem zu mühsam war, sich die Details zu überlegen. In Wirklichkeit weiss man also genau, dass man eine erhebliche Lücke lässt, will sich selbst und anderen aber aus Bequemlichkeit das Gegenteil weismachen und begeht dabei leicht ernsthafte Fehler.

Natürlich muss man andere nicht mit langweiligen Rechnungen quälen. Sich selbst aber schon, wo man nicht die gleiche Rechnung schon hundertmal gemacht hat. Oft stellt man dabei fest, dass die Sache viel weniger trivial war, als man gedacht hatte. Man sollte sich also wirklich stets alle Details überlegen und zumindest für sich dokumentieren. Wenn man dann in der Kommunikation Details weglässt, kann man dem Adressaten genau sagen, worauf es dabei ankommt, und muss sich nicht mit Wischiwaschi-Formulierungen herausreden. Dann kann man zum Beispiel sagen „Durch direkte Anwendung von ... und ... folgt ...“. Das ist viel hilfreicher, und kaum länger, als „Jetzt zeigt man leicht ...“.

Ausserdem hängt es stets vom Zusammenhang ab, was man als leicht und offensichtlich oder als schwer und undurchsichtig empfindet. Mathematik hat die faszinierende Eigenschaft, dass einem etwas für eine Weile als völlig unverständlich erscheinen kann, bis sich die Ideen im Kopf so angeordnet haben, dass es einem danach als die natürlichste Sache der Welt vorkommt. Dann vergisst man nur zu leicht, wie sehr man um die neue Erkenntnis ringen musste. Vor dem Moment des Aha-Erlebnisses war die Sache dann eben weder trivial noch offensichtlich.

Diesen Denkprozess beim Adressaten sollte man bei jeder mathematischen Mitteilung berücksichtigen, schon aus Respekt vor dem anderen Menschen. Ohnehin hört dieser bei Worten wie „trivial“ und „offensichtlich“ schnell den unterschweligen Vorwurf „Du bist dumm, wenn du das nicht verstehst“. Solche Worte werden schnell zu Waffen, die den Adressaten beleidigen und zurückstossen, auch wenn sie nicht so gemeint sind. Man sollte sie daher nur sehr zurückhaltend verwenden. Zum Respekt vor anderen

gehört auch, klar zu kommunizieren und Mehrdeutigkeiten zu vermeiden und sie nicht raten zu lassen, was man denn eigentlich meint.

Die axiomatische Methode:

Wie oben erklärt, besteht das Ziel der Mathematik darin, Sätze über die untersuchten mathematischen Objekte zu beweisen, also wahre Aussagen darüber zu etablieren. Dies tun wir, indem wir neue Aussagen mittels logischer Schlussregeln aus anderen, bereits davor als wahr erkannten Aussagen herleiten. Vielleicht haben wir jene auf noch frühere wahre Aussagen zurückgeführt, und so weiter, aber wir können diesen Regress nicht unendlich oft durchführen. Wir müssen uns daher auf geeignete Anfangsaussagen einigen, welche wir als wahr postulieren und nicht länger zu beweisen versuchen. Diese Anfangsaussagen nennt man Axiome.

Die sogenannte *axiomatische Methode* besteht darin, geeignete Axiomensysteme herauszusuchen und alle weiteren Sätze nur aus diesen herzuleiten. Da die Axiome innerhalb des formalen Systems nicht zu beweisen sind, müssen wir uns damit begnügen, solche Axiome zu wählen, die uns aus unserer menschlichen Anschauung heraus als besonders plausibel erscheinen. Dabei können wir meist nicht beweisen, dass wir nicht einem fundamentalen Irrtum erliegen. Zum Beispiel kann man nicht beweisen, dass die üblichen Axiome der natürlichen Zahlen oder der Mengenlehre widerspruchsfrei sind. Wir können nur versuchen, Probleme zu minimieren, indem wir möglichst wenige und möglichst einfache Axiome wählen.

Oft hat man bei der Wahl der Axiome eine gewisse Freiheit, und verschiedene Axiomensysteme für dieselben Objekte stellen sich als äquivalent heraus. Die etablierten Axiomensysteme für die gängigsten mathematischen Begriffe haben sich jedoch als günstig bewährt.

Axiome für die gesamte Mathematik umfassen solche für die Prädikatenlogik und die Mengenlehre. Diejenigen, welche man heute verwendet, gehen auf das erste Drittel des 20. Jahrhunderts zurück und werden von fast allen Mathematikern akzeptiert. Dazu gibt es Axiome für die natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen, welche man aber auf die üblichen Axiome der Mengenlehre zurückführen kann, das heisst: Im Rahmen der Mengenlehre kann man beweisen, dass die Axiomensysteme für die natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen erfüllbar sind.

Axiomensysteme benutzt man ausserdem, um spezielle mathematische Objekte wie Körper, Gruppen, Ringe, Vektorräume, topologische Räume, usw. zu definieren. Solche Objekte bestehen in der Regel aus einer oder mehreren Mengen sowie Funktionen und Relationen auf diesen, welche gemeinsam gewisse Eigenschaften, eben Axiome, erfüllen müssen. Das Studium dieser Objekte besteht dann einerseits darin, Folgerungen aus diesen Axiomen herzuleiten, und andererseits darin, die Beziehungen zwischen verschiedenen Objekten, welche jedes für sich die Axiome erfüllen, zu klären.

Euklids „Elemente“:

Die axiomatische Methode wurde im antiken Griechenland entwickelt und vor rund einem Jahrhundert endgültig klar formuliert und zur Grundlage der Mathematik er-

klärt. Dieser Methode folgt das Werk „Elemente“ aus dem 4. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung, in dem Euklid das im Mittelmeerraum verfügbare geometrische Wissen seiner Zeit zusammengefasst hat.

Er beginnt mit einigen Erläuterungen wie „*Punkt* ist, was ohne Teil ist“ und „*Linie* ist Länge ohne Breite“. Er benennt also zuerst die Begriffe, mit denen er im folgenden arbeiten will. Seine Definitionen haben allerdings keinen formalen mathematischen Sinn, weil nicht bereits vorher erklärt worden ist, was „Teil“ und „Länge“ und „Breite“ bedeuten. Sie sind eher wie Definitionen aus einem Wörterbuch, in dem die Bedeutung jedes Worts mittels anderer Wörter erklärt wird und das nur sinnvoll benutzen kann, wer bereits einen nicht näher bestimmten Basiswortschatz besitzt. Der einzige sinnvolle mathematische Inhalt der zitierten Stellen liegt in der Ankündigung „Wir werden im folgenden von Punkten und Linien sprechen, deren Eigenschaften wir noch näher angeben werden“. Oder in die heutige Sprache der Mengen übersetzt: „Gegeben sei eine Menge \mathcal{E} , deren Elemente wir Punkte nennen wollen“ und „Gegeben sei eine Menge \mathcal{L} , deren Elemente Teilmengen von \mathcal{E} sind, welche wir Linien nennen“.

Beim Umgang mit Euklids Bezeichnungen ist aber Vorsicht geboten. Zum Beispiel meint er mit „Gleichheit“ von Strecken oder Winkeln in Wirklichkeit Kongruenz. Und mit Linien meint er Kurven und muss es folglich extra dazu sagen, wenn er von einer geraden Linie sprechen will. Er lässt auch unklar, welche Gebilde von Punkten er genau als Linien ansehen will, und kann nur Beispiele wie z.B. Kreise angeben, aber keine vollständige mathematische Definition. Da er von Winkeln spricht, wo sich zwei Linien schneiden, schwebt ihm sicher etwas der Art vor, was man heute regulär eingebettete differenzierbare Kurven nennt; insbesondere dürfen Linien keine Ecken oder Selbstüberschneidungen haben. Sie dürfen durch Anfangs- und Endpunkte begrenzt sein oder sich bis ins Unendliche erstrecken.

Einen Kreis definiert er nach heutigen Massstäben vollständig präzise als die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt, genannt Mittelpunkt, einen gegebenen positiven Abstand, genannt Radius, haben. Er ist sich dessen bewusst, dass diese Definition alleine keinesfalls impliziert, dass der Mittelpunkt oder der Radius durch den Kreis eindeutig bestimmt sind, sondern dass dies erst später aus anderen Aussagen hergeleitet werden muss und kann.

Sodann gibt Euklid einige Postulate und Axiome an, welche beide als Axiome im heutigen Sinn gemeint sind. Zum Beispiel besagt sein Axiom „Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich“, dass die Kongruenzrelation transitiv ist. Moderner als das geht es nicht. Andere seiner Axiome bedürfen aus heutiger Perspektive jedoch Präzisierungen und Ergänzungen. Sein Axiom „Das Ganze ist grösser als der Teil“ ist eher eine Definition des Begriffs „größer“ denn ein Axiom, weil dieser Begriff vorher noch nicht eingeführt worden war.

Der Hauptteil von Euklids Werk enthält Propositionen, also Lehrsätze, die er aus seinen Postulaten und Axiomen herleitet. Seine Behandlung ist aus heutiger Sicht zwar nicht ganz vollständig, aber insgesamt ein eindrucklicher Beweis für die Stärke der axiomatischen Methode.

2 Hilberts Axiome der euklidischen Ebene

In der ersten Hälfte der Vorlesung behandeln wir den axiomatischen Aufbau der ebenen euklidischen Geometrie in der modernen Formulierung nach Hilbert. Zunächst stellen wir die Grundbausteine und Axiome der euklidischen Ebene zusammen, bevor wir sie in den nächsten Kapiteln im einzelnen besprechen:

Grundbausteine:

- Eine Menge \mathcal{E} , deren Elemente wir *Punkte* nennen.
- Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$, deren Elemente wir *Geraden* nennen.
- Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Für $(A, B, C) \in \mathcal{Z}$ schreiben wir auch $A * B * C$ und sagen *B liegt zwischen A und C*.

Die Inzidenzaxiome:

- (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- (I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.
- (I3) Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

Eine Kollektion von Punkten heisst *kollinear*, wenn eine Gerade existiert, die alle diese Punkte enthält. Für eine Gerade g und Punkte A, B nicht auf g sagen wir, dass A und B *auf entgegengesetzten Seiten von g liegen*, falls g einen Punkt zwischen A und B enthält, und andernfalls, dass A und B *auf derselben Seite von g liegen*.

Die Lageaxiome:

- (L1) Liegt B zwischen A und C , so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt auch zwischen C und A .
- (L2) Sind A und B zwei verschiedene Punkte, so gibt es einen Punkt C , so dass B zwischen A und C liegt.
- (L3) Sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, so liegt genau einer von ihnen zwischen den beiden anderen.
- (L4) (*Paschs Axiom*) Sei g eine Gerade, und seien A, B, C nicht kollineare Punkte ausserhalb von g . Wenn A und B auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, so liegen entweder A und C auf entgegengesetzten Seiten von g , oder B und C auf entgegengesetzten Seiten von g , aber nicht beides.

Für verschiedene Punkte A, B heisst die Menge $AB := \{A, B\} \cup \{C \in \mathcal{E} \mid A * C * B\}$ eine *Strecke* und die Menge $\overrightarrow{AB} := AB \cup \{C \in \mathcal{E} \mid A * B * C\}$ ein *Strahl*. Für drei nicht kollineare Punkte A, B, C heisst die Menge $\sphericalangle BAC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ ein *Winkel*.

Weitere Grundbausteine:

- Eine Relation \cong auf der Menge aller Strecken. Für $AB \cong A'B'$ sagen wir AB ist kongruent zu $A'B'$.
- Eine Relation \simeq auf der Menge aller Winkel. Für $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ sagen wir $\sphericalangle BAC$ ist kongruent zu $\sphericalangle B'A'C'$.

Die Kongruenzaxiome:

- (K1) Für jede Strecke AB und je zwei verschiedene Punkte A' und C' existiert ein eindeutiger Punkt $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ mit $AB \cong A'B'$.
- (K2) Die Relation \cong ist eine Äquivalenzrelation.
- (K3) Gilt $A * B * C$ und $A' * B' * C'$ sowie $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$.
- (K4) Für jeden Winkel $\sphericalangle BAC$, je zwei verschiedene Punkte A' und C' einer Geraden g , und jeden Punkt $D' \notin g$ existiert ein eindeutiger Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $B' \notin g$, so dass $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ ist und B' und D' auf derselben Seite von g liegen.
- (K5) Die Relation \simeq ist eine Äquivalenzrelation.
- (K6) Sind A, B, C nicht kollinear und A', B', C' nicht kollinear, und gilt $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ und $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$ und $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle B'C'A'$.

Das Parallelenaxiom:

- (P) Ist g eine Gerade und A ein Punkt nicht auf g , so gibt es höchstens eine Gerade durch A , welche g nicht schneidet.

Die Stetigkeitsaxiome:

- (S1) (*Archimedisches Axiom*) Für jede Strecke AB und je zwei verschiedene Punkte A' und B' existieren eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Punkte $C_0, C_1, \dots, C_n \in \overrightarrow{A'B'}$ mit $C_0 = A'$ und den folgenden Eigenschaften:
1. Für jedes $i = 1, \dots, n - 1$ gilt $C_{i-1} * C_i * C_{i+1}$.
 2. Für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $C_{i-1}C_i \cong AB$.
 3. $A' * B' * C_n$.
- (S2) (*Dedekindsches Axiom*) Ist eine Gerade g die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Teilmengen S und T , und liegt kein Punkt von S zwischen zwei Punkten von T und kein Punkt von T zwischen zwei Punkten von S , so existiert ein eindeutiger Punkt A auf g , so dass für jeden Punkt $B \in S \setminus \{A\}$ und jeden Punkt $C \in T \setminus \{A\}$ der Punkt A zwischen B und C liegt.

3 Inzidenz und Lage

Allgemein versteht man unter einer *Geometrie* eine Menge von Punkten mit bestimmten Zusatzdaten wie z.B. einer Menge von Geraden. Der Begriff ist allerdings nicht klar definiert und wird nur lose verwendet.

Grundbausteine:

- Eine Menge \mathcal{E} , deren Elemente wir *Punkte* nennen.
- Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$, deren Elemente wir *Geraden* nennen.
- Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Für $(A, B, C) \in \mathcal{Z}$ schreiben wir auch $A * B * C$ und sagen *B liegt zwischen A und C*.

Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ die Potenzmenge von \mathcal{E} , und $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, bzw. $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, die Menge aller geordneten Paare, bzw. Tripel, von Elementen aus \mathcal{E} .

Die Inzidenzaxiome:

Mit *Inzidenz* meint man die Relation „ $A \in g$ “ für Punkte A und Geraden g .

- (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
 (I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.
 (I3) Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

Zur Übung übersetzen wir diese Axiome in die Sprache der Prädikatenlogik:

- (I1) $\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{E} : A \neq B \rightarrow \exists! g \in \mathcal{G} : A \in g \wedge B \in g$
 (I2) $\forall g \in \mathcal{G} \exists A \in g \exists B \in g : A \neq B$
 (I3) $\exists A \in \mathcal{E} \exists B \in \mathcal{E} \exists C \in \mathcal{E} : (A \neq B \wedge B \neq C \wedge A \neq C) \wedge \neg(\exists g \in \mathcal{G} : A \in g \wedge B \in g \wedge C \in g)$

Aus diesen Axiomen können wir bereits die ersten nicht-trivialen Folgerungen ziehen:

Proposition 3.1 *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Beweis. Seien g und h zwei verschiedene Geraden. Annahme: g und h haben zwei verschiedene Punkte A und B gemeinsam. Dann erfüllen sowohl g als auch h die Bedingung in (I1); folglich gilt $g = h$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist die Annahme falsch, was zu zeigen war. \square

Definition 3.2 Eine Kollektion von Punkten heisst kollinear, wenn eine Gerade existiert, welche alle diese Punkte enthält.

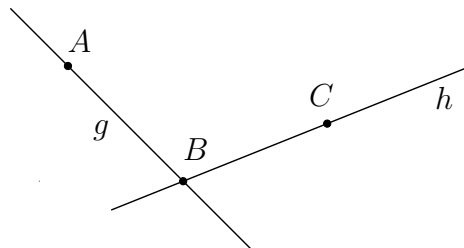
Proposition 3.3 Je drei nicht kollineare Punkte sind paarweise verschieden.

Beweis. Sind zwei der Punkte gleich und verschieden von dem dritten, so bilden sie in Wirklichkeit zwei verschiedene Punkte, welche nach (I1) auf einer Geraden liegen, im Widerspruch zur Annahme. Sind alle drei Punkte gleich einem Punkt A , so brauchen wir noch einen von diesem verschiedenen Punkt B , um nach (I1) eine Gerade zu finden, welche A enthält, und damit einen Widerspruch zur Annahme zu erhalten. Aber einer der drei nach (I3) existierenden verschiedenen Punkte ist verschieden von A und genügt somit als B . \square

Proposition 3.4 (a) Für jede Gerade g existiert ein Punkt nicht auf g .

(b) Für jeden Punkt A existiert eine Gerade nicht durch A .

Beweis. Wähle drei verschiedene nicht kollineare Punkte gemäss (I3). Mindestens einer von ihnen liegt dann nicht auf g ; also gilt (a). Andererseits ist mindestens einer von ihnen verschieden von A , nennen wir ihn B . Sei g die nach (I1) existierende Gerade durch A und B . Mit (a) finden wir dann einen Punkt C nicht auf g . Insbesondere ist dann $C \neq B$, und somit existiert nach (I1) eine Gerade h durch B und C . Würde diese auch A enthalten, so wäre sie nach (I1) identisch mit g , was wegen $C \notin g$ einen Widerspruch bedeutet. Also gilt $A \notin h$ und somit (b). \square

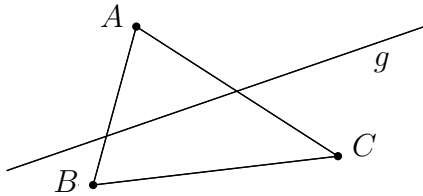
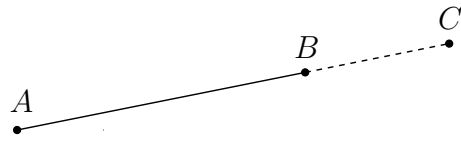


Die Lageaxiome:

Definition 3.5 Für eine Gerade g und Punkte A, B nicht auf g sagen wir, dass A und B auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, falls g einen Punkt zwischen A und B enthält, und andernfalls, dass A und B auf derselben Seite von g liegen.

- (L1) Liegt B zwischen A und C , so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt auch zwischen C und A .
- (L2) Sind A und B zwei verschiedene Punkte, so gibt es einen Punkt C , so dass B zwischen A und C liegt.
- (L3) Sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, so liegt genau einer von ihnen zwischen den beiden anderen.
- (L4) (*Paschs Axiom*) Sei g eine Gerade, und seien A, B, C nicht kollineare Punkte ausserhalb von g . Wenn A und B auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, so liegen entweder A und C auf entgegengesetzten Seiten von g , oder B und C auf entgegengesetzten Seiten von g , aber nicht beides.

Vorsicht: Das Axiom (L2) besagt nicht etwa, dass zwischen je zwei verschiedenen Punkten ein dritter liegt, sondern von einem Punkt A über einen von diesem verschiedenen Punkt B hinausgehend einen weiteren, wie in obiger Abbildung.



Die Abbildung links illustriert die Situation von Paschs Axiom (L4). Man beachte, dass man das Axiom auf mehrere Weisen lesen kann, nämlich als Aussage, dass unter gewissen Bedingungen ein Schnittpunkt einer Strecke mit einer Geraden existiert, oder als Aussage, dass unter gewissen anderen Bedingungen ein solcher Schnittpunkt nicht existiert. Wir werden es in Proposition 3.7 und 3.25 noch eingehend besprechen.

Zur Übung (oder Abschreckung?) sind hier die Axiome in die Sprache der Prädikatenlogik übersetzt:

(L1) $\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{E} \forall C \in \mathcal{E} :$

$$A * B * C \rightarrow \left((A \neq B \wedge B \neq C \wedge A \neq C) \wedge \left(\begin{array}{l} (\exists g \in \mathcal{G} : A \in g \wedge B \in g \wedge C \in g) \wedge \\ C * B * A \end{array} \right) \right)$$

(L2) $\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{E} : (A \neq B) \rightarrow (\exists C \in \mathcal{E} : A * B * C)$

(L3) $\forall g \in \mathcal{G} \forall A \in g \forall B \in g \forall C \in g : (A \neq B \wedge B \neq C \wedge A \neq C) \rightarrow$

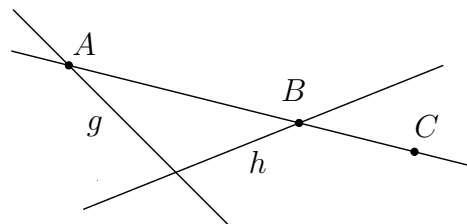
$$\left(\begin{array}{l} \left((A * B * C) \wedge \neg(B * A * C) \wedge \neg(A * C * B) \right) \vee \\ \left(\neg(A * B * C) \wedge (B * A * C) \wedge \neg(A * C * B) \right) \vee \\ \left(\neg(A * B * C) \wedge \neg(B * A * C) \wedge (A * C * B) \right) \end{array} \right)$$

(L4) $\forall g \in \mathcal{G} \forall A \in \mathcal{E} \setminus g \forall B \in \mathcal{E} \setminus g \forall C \in \mathcal{E} \setminus g :$

$$\neg(\exists h \in \mathcal{G} : A \in h \wedge B \in h \wedge C \in h) \rightarrow \left(\begin{array}{l} (\exists D \in g : A * D * B) \rightarrow \\ \left(\begin{array}{l} \left((\exists E \in g : A * E * C) \wedge \neg(\exists F \in g : B * F * C) \right) \vee \\ \left(\neg(\exists E \in g : A * E * C) \wedge (\exists F \in g : B * F * C) \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Proposition 3.6 Für je zwei Geraden g und h existiert ein Punkt nicht in $g \cup h$.

Beweis. Im Fall $g = h$ ist dies der Inhalt von Proposition 3.4 (a). Andernfalls gilt $|g \cap h| \leq 1$ nach Proposition 3.1. Nach Axiom (I2) existieren somit ein Punkt $A \in g \setminus h$ und ein Punkt $B \in h \setminus g$. Diese sind dann automatisch verschieden, also existiert nach (L2) ein Punkt C mit $A * B * C$. Nach (L1) ist dieser verschieden von A und B . Wäre $C \in g$, so wäre g die nach (I1) eindeutige



Gerade durch A und C , und nach (L1) wäre somit auch $B \in g$, im Widerspruch zur Konstruktion. Also ist $C \notin g$. Entsprechend zeigt man $C \notin h$, und wir sind fertig. \square

Nun können wir den ersten grösseren Satz formulieren und beweisen. Er besagt anschaulich, dass die Ebene durch Wegnehmen einer Gerade in genau zwei Teile zerfällt. Dies ist der erste Hinweis darauf, dass die Axiome tatsächlich eine ebene Geometrie beschreiben und nicht etwa eine höherdimensionale.

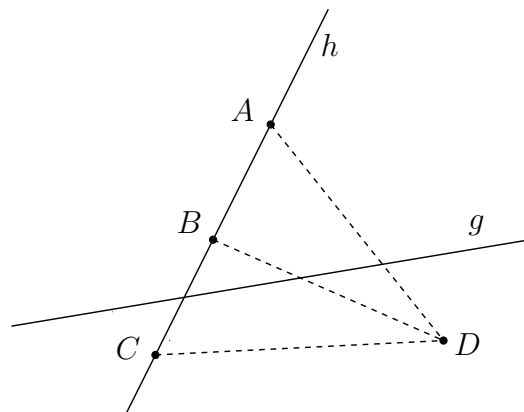
Proposition 3.7 *Für jede Gerade g ist die Relation „auf derselben Seite von g liegen“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E} \setminus g$ mit genau zwei Äquivalenzklassen.*

Beweis. Für jeden Punkt $A \in \mathcal{E} \setminus g$ existiert nach (L1) kein Punkt zwischen A und A , also erst recht keiner auf g ; folglich liegen A und A auf derselben Seite von g . Also ist die Relation reflexiv.

Seien A und $B \in \mathcal{E} \setminus g$ auf derselben Seite von g . Dann liegt nach Definition kein Punkt auf g zwischen A und B . Nach (L1) liegt dann auch kein Punkt auf g zwischen B und A , und somit liegen B und A auf derselben Seite von g . Also ist die Relation symmetrisch. (Das ist das formal vollständige Argument. Andernorts werden wir es aber stets abkürzen zu: Das folgt aus der Symmetrie im Axiom (L1).)

Seien nun $A, B, C \in \mathcal{E} \setminus g$ mit der Voraussetzung, dass sowohl A und B auf derselben Seite von g liegen, als auch B und C auf derselben Seite von g liegen. Für die Transitivität ist zu zeigen, dass dann auch A und C auf derselben Seite von g liegen. In den Fällen $A = B$ und $B = C$ folgt dies sofort aus der Voraussetzung. In dem Fall $A = C$ folgt es aus der Reflexivität. Sind die Punkte nicht kollinear, so können A und C nicht auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, da sonst nach (L4) und der Symmetrie entweder A und B auf entgegengesetzten Seiten von g liegen oder B und C auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, was beides der Voraussetzung widerspricht.

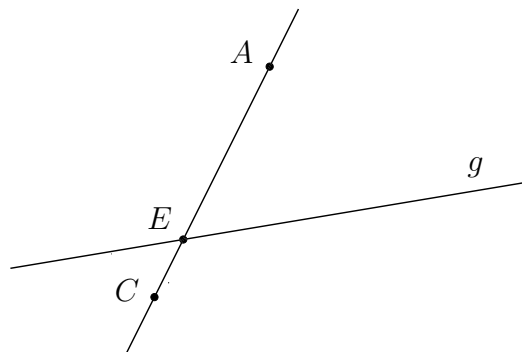
Übrig bleibt somit nur der Fall, dass A, B, C paarweise verschiedene Punkte einer Geraden h sind. In diesem Fall können wir das Axiom (L4) nicht direkt anwenden, weil es ja leider drei nicht-kollineare Punkte erfordert. Nach Proposition 3.6 können wir aber einen Punkt $D \notin g \cup h$ wählen und (L4) auf D zusammen mit zwei beliebigen der Punkte A, B, C anwenden. Nehmen wir also an, dass A und C auf entgegengesetzten Seiten von g liegen. Nach (L4) für das Tripel (A, C, D) liegen dann entweder A und D , oder C und D , auf entgegengesetzten Seiten von g , aber nicht beides. Da die Situation symmetrisch ist unter der Vertauschung von A und C , können wir oBdA annehmen, dass A und D auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, aber C und D auf derselben Seite von g liegen. Dann folgt aus (L4) für das Tripel (A, D, B) und der Voraussetzung, dass D und B auf entgegengesetzten Seiten von g liegen. Aus (L4) für das Tripel (D, B, C)



und der Voraussetzung folgt dann weiter, dass D und C auf entgegengesetzten Seiten von g liegen. Damit haben wir aber einen Widerspruch erreicht, so dass die Annahme, dass A und C auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, falsch sein muss.

Somit ist die Transitivität in allen Fällen bewiesen. Also ist die fragliche Relation eine Äquivalenzrelation.

Um die letzte Aussage zu beweisen, wählen wir zunächst einen Punkt $A \notin g$ gemäß Proposition 3.4 (a) und einen Punkt $E \in g$ gemäß (I2). Diese sind dann automatisch verschieden; nach (L2) existiert somit ein Punkt C mit $A * E * C$. Nach (L1) ist dieser verschieden von E . Wäre $C \in g$, so wäre g nach (I1) die einzige Gerade durch C und E und enthielte nach (L1) somit auch A , im Widerspruch zur Konstruktion. Also ist $C \notin g$. Nach Konstruktion liegen A und C auf entgegengesetzten Seiten von g und repräsentieren somit zwei verschiedene Äquivalenzklassen in $\mathcal{E} \setminus g$.



Um zu beweisen, dass es genau zwei verschiedene Äquivalenzklassen gibt, bleibt zu zeigen, dass jeder beliebige Punkt $B \in \mathcal{E} \setminus g$ auf derselben Seite wie A oder auf derselben Seite wie C liegt. Ist $B = A$ oder $B = C$, so folgt das aus der Reflexivität. Ist B nicht kollinear zu A und C , so folgt es aus (L4) für das Tripel (A, C, B) (wie genau?). Übrig bleibt wieder nur der Fall, dass A, B, C paarweise verschiedene Punkte einer Geraden h sind. In diesem Fall wählen wir wieder einen Punkt $D \notin g \cup h$. Da A und C auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, liegen nach (L4) entweder A und D , oder C und D , auf entgegengesetzten Seiten von g , aber nicht beides. Nach etwaigem Vertauschen von A und C können wir oBdA annehmen, dass A und D auf entgegengesetzten Seiten von g , aber C und D auf derselben Seite von g liegen, wie auf der Abbildung von der vorigen Seite. Dann folgt aus (L4) für das Tripel (A, D, B) , dass entweder A und B , oder D und B auf derselben Seite von g liegen. Im letzteren Fall folgt aus der bereits bewiesenen Transitivität, dass auch C und B auf derselben Seite von g liegen. Also liegt B auf derselben Seite wie A oder wie C , was zu beweisen war. \square

Bemerkung: Die Hauptarbeit im obigen Beweis diente dazu, die Folgerung von Axiom (L4) auch in dem Fall zu beweisen, dass die gegebenen Punkte kollinear sind. In anderen Texten wird das Axiom gleich auch für solche gefordert. Zwar sollten Axiome eigentlich immer so schwach formuliert werden wie möglich, damit man in jeder konkreten Situation den geringsten Aufwand hat, sie zu verifizieren. Das Weglassen von Spezialfällen wirkt aber oft etwas künstlich und macht die Anwendung meist nicht wirklich einfacher.

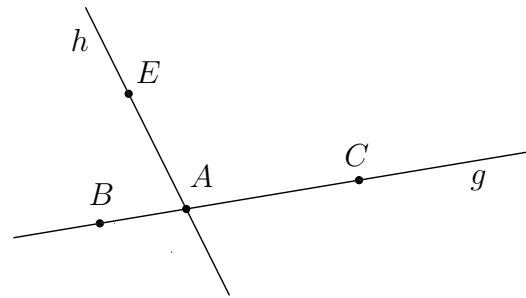
Als nächstes schränken wir die obige Äquivalenzrelation auf eine Gerade ein und zeigen dadurch, dass die Gerade durch Wegnehmen eines Punktes in genau zwei Teile zerfällt. Dies deutet anschaulich darauf hin, dass eine Gerade tatsächlich etwas Eindimensionales ist und keine Endpunkte besitzt.

Definition 3.8 Sei g eine Gerade und A ein Punkt auf g . Für Punkte $B, C \in g \setminus \{A\}$ sagen wir, dass B und C auf entgegengesetzten Seiten von A auf g liegen, falls A zwischen B und C liegt, und andernfalls, dass B und C auf derselben Seite von A auf g liegen.

Proposition 3.9 Für jede Gerade g und jeden Punkt $A \in g$ ist die Relation „auf derselben Seite von A auf g liegen“ eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus \{A\}$ mit genau zwei Äquivalenzklassen.

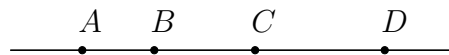
Beweis. Sei E ein Punkt nicht auf g , zum Beispiel einer der drei aus (I3). Dann ist $E \neq A$, und nach (I1) existiert eine Gerade h durch E und A . Nach Proposition 3.1 gilt dann $g \cap h = \{A\}$ und somit $g \setminus \{A\} = g \cap (\mathcal{E} \setminus h)$. Die Äquivalenzrelation „auf derselben Seite von h “ auf $\mathcal{E} \setminus h$ induziert daher eine Äquivalenzrelation auf der Teilmenge $g \setminus \{A\}$.

Nach Definition 3.5 liegen $B, C \in g \setminus \{A\}$ auf entgegengesetzten Seiten von h genau dann, wenn h einen Punkt D zwischen B und C enthält. Nach (L1) liegt dieser dann auch auf g , und wegen $g \cap h = \{A\}$ muss er somit gleich A sein. Also liegen $B, C \in g \setminus \{A\}$ auf entgegengesetzten Seiten von h genau dann, wenn A zwischen B und C liegt, d.h., wenn B und C auf entgegengesetzten Seiten von A auf g liegen. Somit ist die Einschränkung genau die Relation 3.8 und nach Proposition 3.7 daher ebenfalls eine Äquivalenzrelation.



Nach (I2) können wir einen Punkt $B \in g \setminus \{A\}$ wählen, und sodann nach (L2) einen Punkt C mit $B * A * C$. Nach (L1) ist dann $C \in g \setminus \{A\}$ und nach Definition auf der entgegengesetzten Seite von A auf g . Also liegen B und C auf entgegengesetzten Seiten von h . Nach Proposition 3.7 liegt dann jeder beliebige Punkt $D \in g \setminus \{A\}$ auf derselben Seite von h wie B oder C ; folglich liegt er auf derselben Seite von A auf g wie B oder C . Insgesamt zeigt dies, dass die eingeschränkte Relation genau zwei Äquivalenzklassen besitzt. \square

Ein volles Verständnis der Lagebeziehungen zwischen Punkten auf einer Geraden beinhaltet eine Reihe weiterer Eigenschaften, die uns so selbstverständlich erscheinen, dass wir Mühe haben, sie überhaupt zu formulieren. Die erste betrifft vier Punkte auf einer Geraden:



Proposition 3.10 Für beliebige Punkte A, B, C, D auf einer Geraden gilt:

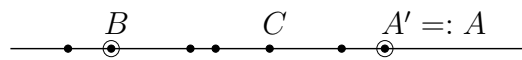
- (a) $A * B * C$ und $B * C * D$ implizieren $A * B * D$ und $A * C * D$.
- (b) $A * B * D$ und $B * C * D$ implizieren $A * B * C$ und $A * C * D$.

Beweis Übungsaufgabe.

Proposition 3.11 *Sei S eine nicht-leere endliche Teilmenge einer Geraden g . Dann existiert ein Punkt $A \in S$, so dass alle Punkte in $S \setminus \{A\}$ auf derselben Seite von A auf g liegen.*

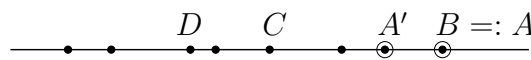
Beweis. Induktion über die Kardinalität $n := |S|$. Für $n = 1$ gilt die Aussage trivialerweise für den einzigen Punkt $A \in S$. Für $n = 2$ gilt sie für jede Wahl von $A \in S$, weil überhaupt nur noch ein weiterer Punkt übrig ist.

Sei nun $n \geq 3$ und die Aussage bewiesen für jede Teilmenge der Kardinalität $n - 1$. Wähle irgendeinen Punkt $B \in S$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann ein Punkt $A' \in S' := S \setminus \{B\}$, so dass alle Punkte in $S' \setminus \{A'\}$ auf derselben Seite von A' in g liegen. Wegen $n \geq 3$ können wir einen Punkt $C \in S' \setminus \{A'\}$ wählen. Wenn B und C auf derselben Seite von A' auf g liegen, so gilt dasselbe wegen der Transitivität auch für B und jeden Punkt in $S' \setminus \{A'\}$; somit liegen alle Punkte in $S \setminus \{A'\}$ auf derselben Seite von A' in g , und $A := A'$ hat die gewünschte Eigenschaft.



Andernfalls liegen B und C auf entgegengesetzten Seiten von A' auf g , und aufgrund der Transitivität gilt dasselbe für B und jeden beliebigen Punkt $D \in S' \setminus \{A'\}$. Nach Definition bedeutet dies, dass A' zwischen B und D liegt. Nach Axiom (L3) liegt dann B nicht zwischen A' und D , was nach Definition 3.8 wiederum bedeutet, dass A' und D auf derselben Seite von B auf g liegen.

Aufgrund der Transitivität dieser Relation liegen somit alle Punkte in $S' = S \setminus \{B\}$ auf derselben Seite von B auf g , und $A := B$ hat die gewünschte Eigenschaft. \square



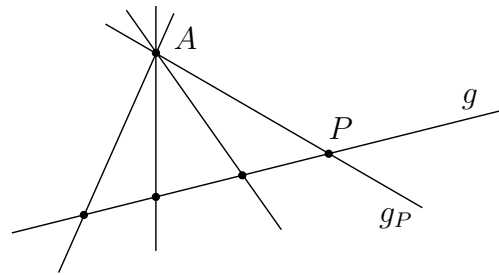
Proposition 3.12 *Jede Gerade enthält unendlich viele verschiedene Punkte.*

Beweis. Wir nehmen an, es gebe eine Gerade g , die nur endlich viele Punkte enthält. Nach (I2) ist sie dann zumindest nicht leer, und somit können wir Proposition 3.11 auf $S = g$ anwenden. Folglich enthält g einen Punkt A , so dass alle übrigen Punkte in g auf derselben Seite von A in g liegen. Also besteht $g \setminus \{A\}$ aus höchstens einer Äquivalenzklasse für die Relation „auf derselben Seite von A auf g “, im Widerspruch zu Proposition 3.9. Somit war die Annahme falsch, was zu zeigen war. (Bemerkung: Man kann diesen Beweis auch als Induktionsbeweis führen; welchen man vorzieht, ist Geschmackssache.) \square

Proposition 3.13 *Durch jeden Punkt gehen unendlich viele verschiedene Geraden.*

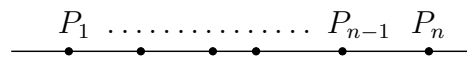
Beweis. Sei A der gegebene Punkt, und nach Proposition 3.4 (b) sei g eine Gerade nicht durch A . Jeder Punkt $P \in g$ ist dann von A verschieden; somit existiert nach (I1) genau eine Gerade g_P durch A und P . Wäre $g_P = g_{P'}$ für zwei verschiedene Punkte $P, P' \in g$, so wäre sowohl g als auch g_P eine Gerade durch P und P' ; nach

(I1) wäre also $g_P = g$, was wegen $A \in g_P$ und $A \notin g$ einen Widerspruch liefert. Also sind für verschiedene $P \in g$ die Geraden g_P verschieden. Da nach Proposition 3.12 unendlich viele verschiedene Punkte $P \in g$ existieren, liefert dies unendlich viele verschiedene Geraden der Form g_P durch A . \square



Proposition 3.14 Jede endliche Teilmenge S einer Geraden g kann man so durchnummerieren, d.h., in der Form $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ schreiben für paarweise verschiedene Punkte P_1, \dots, P_n , dass für alle Indizes $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ der Punkt P_j zwischen P_i und P_k liegt genau dann, wenn $i < j < k$ oder $i > j > k$ ist.

Beweis. Induktion über die Kardinalität $n := |S|$. Für $n = 0, 1, 2$ erfüllt jede Nummerierung der Punkte die gewünschte Äquivalenz (wieso genau?). Sei also $n \geq 3$ und die Aussage bewiesen für jede Teilmenge der Kardinalität $n - 1$. Wähle einen Punkt $P_n \in S$ mit der Eigenschaft aus Proposition 3.11. Nach Induktionsvoraussetzung können wir $S \setminus \{P_n\} = \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$ schreiben, so dass die gewünschte Äquivalenz für alle $i, j, k \in \{1, \dots, n - 1\}$ gilt. Man beachte, dass die Äquivalenz erhalten bleibt, wenn wir die Reihenfolge der Punkte P_1, \dots, P_{n-1} umdrehen, das heisst, wenn wir jedes dieser P_i in P_{n-i} umbenennen.



Nach (L3) liegt nun genau einer der drei verschiedenen Punkte P_1, P_{n-1}, P_n zwischen den beiden anderen. Da nach Konstruktion P_1 und P_{n-1} auf derselben Seite von P_n auf g liegen, kann dies nicht der Punkt P_n sein. Ist es P_1 wie in nebenstehender Abbildung, so erreichen wir durch Umdrehen der Reihenfolge, dass es der Punkt P_{n-1} wird, wie in der Abbildung davor. In jedem Fall können wir also oBdA annehmen, dass P_{n-1} zwischen P_1 und P_n liegt.



Wir behaupten, dass dann $P_i * P_j * P_k$ gilt für alle Indizes $1 \leq i < j < k \leq n$. Nach (L1) ist das äquivalent zu $P_k * P_j * P_i$. In dem Fall $i < j < k < n$ ist letzteres bereits klar, und ebenso in dem Fall $(i, j, k) = (1, n - 1, n)$. Ist $1 < i < j = n - 1$ und $k = n$, so wissen wir also schon $P_n * P_{n-1} * P_1$ und $P_{n-1} * P_i * P_1$, und nach Proposition 3.10 (b) folgt daraus $P_n * P_{n-1} * P_i$, wie gewünscht. Ist schliesslich $i < j < n - 1$ und $k = n$, so haben wir nach dem soeben bewiesenen $P_n * P_{n-1} * P_j$ sowie $P_{n-1} * P_j * P_i$, und nach Proposition 3.10 (a) folgt daraus $P_n * P_j * P_i$, wie gewünscht. Damit ist die Behauptung in allen Fällen bewiesen.

Aus der Behauptung und (L3) folgt weiter $\neg(P_j * P_i * P_k)$ und $\neg(P_k * P_i * P_j)$ und $\neg(P_i * P_k * P_j)$ und $\neg(P_j * P_k * P_i)$ für alle Indizes $1 \leq i < j < k \leq n$. Ebenso erfordert $P_i * P_j * P_k$ nach (L1) stets, dass i, j, k paarweise verschieden sind. Insgesamt folgt damit die gesuchte Äquivalenz in allen Fällen. \square

Proposition 3.15 Zwischen je zwei verschiedenen Punkten existiert ein dritter.

Beweis Übungsaufgabe. (Hinweis: Zu gegebenen verschiedenen Punkten A und B einer Geraden g konstruiere man Punkte C und D auf entgegengesetzten Seiten von g , so dass A und B auf entgegengesetzten Seiten der Geraden durch C und D liegen.)

Strecken und Strahlen:

Definition 3.16 Für verschiedene Punkte A und B bezeichnen wir

- (a) mit $AB := \{A, B\} \cup \{C \in \mathcal{E} \mid A * C * B\}$ die Strecke von A nach B und nennen A und B deren Endpunkte,
- (b) mit $\overrightarrow{AB} := AB \cup \{C \in \mathcal{E} \mid A * B * C\}$ den Strahl von A in Richtung B , und
- (c) mit \overline{AB} die nach (I1) eindeutige Gerade durch A und B .

Wenn wir die Bezeichnungen AB und \overrightarrow{AB} und \overline{AB} benutzen, so setzen wir also stets voraus, dass A und B verschiedene Punkte sind. Man sieht leicht, dass $AB = BA$ und $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ und $\overline{AB} = \overline{BA}$ gilt (wieso?).

Lemma 3.17 Für jeden Punkt C einer Strecke AB gilt $C \in \{A, B\}$ genau dann, wenn keine Punkte $D, E \in AB$ existieren mit $D * C * E$.

Beweis. Nach der Definition der Strecke ist das Lemma äquivalent zu der kontrapositiven Aussage: Für jeden Punkt $C \in AB$ gilt $A * C * B$ genau dann, wenn Punkte $D, E \in AB$ existieren mit $D * C * E$. Hier gilt die Implikation „ \Rightarrow “ offensichtlich mit $D := A$ und $E := B$. Für die Umkehrung „ \Leftarrow “ nehmen wir an, dass $D, E \in AB$ existieren mit $D * C * E$ für ein $C \in \{A, B\}$. Wegen $AB = BA$ genügt es, den Fall $C = A$ zu betrachten, so dass also $D * A * E$ ist.

Nach (L1) sind dann A, D, E alle verschieden; insbesondere ist mindestens einer von D, E verschieden von A und B . Ausserdem ist die Bedingung $D * A * E$ nach (L1) äquivalent zu $E * A * D$; nach eventuellem Vertauschen von D und E können wir also oBdA annehmen, dass $D \neq A, B$ ist. Die Inklusion $D \in AB$ bedeutet dann $A * D * B$. Nach Proposition 3.10 (a) folgt aus $E * A * D$ und $A * D * B$ nun auch $E * A * B$. Nach (L1) ist daher E verschieden von A und B , und nach (L3) gilt nicht $A * E * B$. Zusammen impliziert dies $E \notin AB$, im Widerspruch zur Annahme. \square

Proposition 3.18 Die Endpunkte jeder Strecke sind durch die Strecke eindeutig bestimmt.

Beweis. In Formeln bedeutet dies: Für beliebige Punkte $A \neq B$ und $A' \neq B'$ gilt $AB = A'B'$ genau dann, wenn $\{A, B\} = \{A', B'\}$ ist. Das ist aber eine direkte Folge aus Lemma 3.17. \square

Proposition 3.19 Für beliebige Punkte A, B und C mit $A * B * C$ gilt

- (a) $AB \cup BC = AC$ und $AB \cap BC = \{B\}$.
 (b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ und $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.
 (c) $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overline{AC}$ und $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{B\}$.

Beweis Übungsaufgabe.

Proposition 3.20 *Zwei Strahlen \overrightarrow{AB} und $\overrightarrow{A'B'}$ sind gleich genau dann, wenn $A' = A$ ist und B' ein von A verschiedener Punkt auf \overrightarrow{AB} ist. Insbesondere ist der Anfangspunkt A jedes Strahls \overrightarrow{AB} durch den Strahl eindeutig bestimmt.*

Beweis Übungsaufgabe. (Vergleiche Lemma 3.17 und Proposition 3.18.)

- Proposition 3.21** (a) *Für je zwei verschiedene Punkte A', B' einer Strecke AB gilt $A'B' \subset AB$.*
 (b) *Für je zwei Punkte A', B' eines Strahls \overrightarrow{AB} mit $A * A' * B'$ gilt $\overrightarrow{A'B'} \subset \overrightarrow{AB}$.*

Beweis Übungsaufgabe.

Dreiecke und Winkel:

Definition 3.22 *Für je drei nicht-kollineare Punkte A, B, C nennen wir*

- (a) *die Menge $ABC := AB \cup BC \cup AC$ das Dreieck mit den Ecken A, B, C und den Seiten AB, BC , und AC , und*
 (b) *die Menge $\sphericalangle BAC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ den Winkel mit dem Scheitelpunkt A und den Schenkeln \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} .*

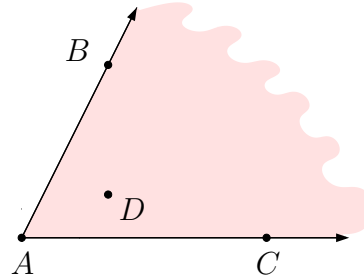
In dieser Terminologie gibt es also keine degenerierten Dreiecke und keine Nullwinkel und keine gestreckten Winkel, und die Notationen ABC und $\sphericalangle ABC$ setzen stets voraus, dass die Punkte nicht kollinear sind. Wir werden später dennoch von dem gestreckten Winkel als Summe zweier Nebenwinkel sprechen.

- Proposition 3.23** (a) *Die Ecken, bzw. Seiten, eines Dreiecks sind durch das Dreieck bis auf Vertauschung eindeutig bestimmt.*
 (b) *Der Scheitelpunkt, sowie die Schenkel bis auf Vertauschung, eines Winkels sind durch den Winkel eindeutig bestimmt.*

Beweis Übungsaufgabe. (Vergleiche Lemma 3.17 und Proposition 3.18.)

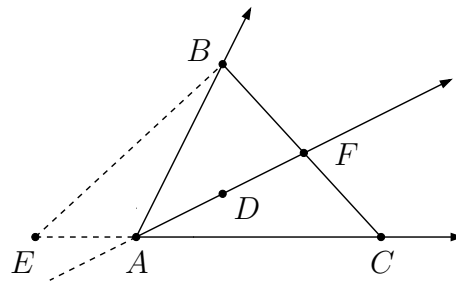
Definition 3.24 Das Innere eines Winkels $\sphericalangle BAC$ ist die Menge aller Punkte D ausserhalb der Geraden \overline{AB} und \overline{AC} , so dass \overline{D} und C auf derselben Seite von \overline{AB} liegen und D und B auf derselben Seite von \overline{AC} liegen.

Das Innere eines Winkels enthält also keine Punkte des Winkels selbst, das heisst, keine Punkte des Rands, genau wie bei dem aus der Analysis bekannten topologischen Begriff des Inneren einer Teilmenge von \mathbb{R}^n .



Proposition 3.25 Für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt D im Inneren von $\sphericalangle BAC$ existiert ein eindeutiger Punkt F in $\overrightarrow{AD} \cap BC$.

Beweisidee: Man wählt einen Punkt E auf der Geraden \overline{AC} , der auf der zu C entgegengesetzten Seite von A liegt und wendet das Axiom (L4) auf das Dreieck EBC und die Gerade \overline{AD} an. Dafür muss man zeigen, dass B und C auf entgegengesetzten Seiten von \overline{AD} liegen, was man durch eine Reihe von Reduktionsschritten, die ebenfalls auf (L4) basieren, erreichen kann. Rest weggelassen.



Bemerkung: Das Axiom (L4) betrifft ein Dreieck und eine Gerade, welche keine der Ecken des Dreiecks enthält und eine der Seiten schneidet, und besagt dann, dass die Gerade genau eine der beiden übrigen Seiten des Dreiecks schneidet. Proposition 3.25 ist ein Analogon dieser Aussage für den Fall, dass die Gerade eine Ecke des Dreiecks enthält, da ja $A \in \overline{AD}$ ist.

Man beachte, dass wir ohne das Parallelenaxiom im allgemeinen Mühe haben zu zeigen, dass zwei gegebene Geraden überhaupt einen Punkt gemeinsam haben. Mit Hilfe des Axioms (L4) kann man aber zumindest einige hinreichende Bedingungen wie in der obigen Proposition angeben.

4 Kongruenz

Die Kongruenzaxiome für Strecken:

Hierfür führen wir einen weiteren Grundbaustein ein:

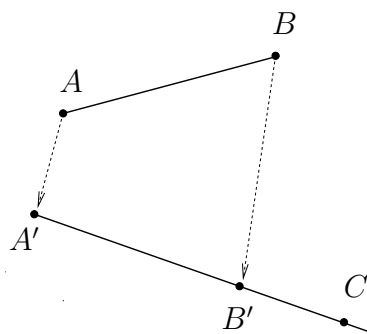
- Gegeben sei eine Relation \cong auf der Menge aller Strecken.
- Für $AB \cong A'B'$ sagen wir *AB ist kongruent zu A'B'*.

(K1) Für jede Strecke AB und je zwei verschiedene Punkte A' und C' existiert ein eindeutiger Punkt $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ mit $AB \cong A'B'$.

(K2) Die Relation \cong ist eine Äquivalenzrelation.

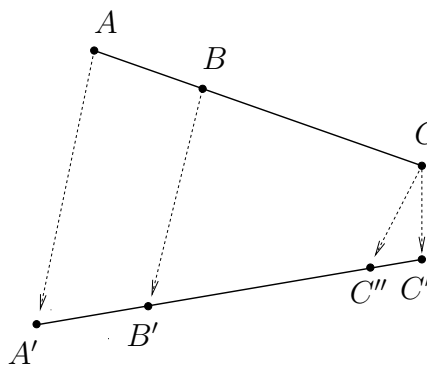
(K3) Gilt $A * B * C$ und $A' * B' * C'$ sowie $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$.

Das Axiom (K1) bedeutet anschaulich, dass man eine gegebene Länge AB auf einem beliebigen Strahl $\overrightarrow{A'C'}$ eindeutig abtragen kann. Das Axiom (K3) bedeutet, dass Kongruenz von Strecken unter Zusammensetzen, also gewissermassen ‘Addition’, von Strecken invariant ist. Sie ist auch invariant unter ‘Subtraktion’:



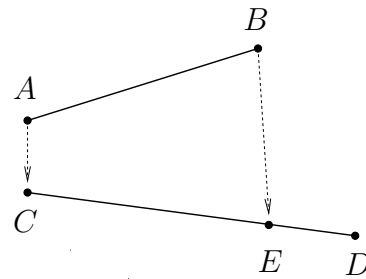
Proposition 4.1 Gilt $A * B * C$ und $A' * B' * C'$ sowie $AB \cong A'B'$ und $AC \cong A'C'$, so gilt auch $BC \cong B'C'$.

Beweis. Sei g' die Gerade durch A', B', C' , und sei C'' der nach (K1) eindeutige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{B'C'}$ mit der Eigenschaft $BC \cong B'C''$. Dann liegen C'' und C' auf derselben Seite von B' auf g' , während nach Voraussetzung C' und A' auf entgegengesetzten Seiten von B' auf g' liegen. Nach Proposition 3.9 liegen daher A' und C'' auf entgegengesetzten Seiten von B' auf g' , und nach Definition 3.8 bedeutet dies $A' * B' * C''$. Insbesondere liegt C'' wie C' auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$. Ausserdem folgt aus $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C''$ und dem Axiom (K3) nun $AC \cong A'C''$. Somit sind C' und C'' Punkte auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $AC \cong A'C'$ und $AC \cong A'C''$; die Eindeutigkeit in (K1) impliziert daher $C' = C''$. Die Eigenschaft $BC \cong B'C''$ ist also gleichbedeutend mit $BC \cong B'C'$, was zu zeigen war. \square



Mit Hilfe der Kongruenz von Strecken können wir zwar noch keine Längen messen, aber Strecken hinsichtlich ihrer hypothetischen Längen miteinander vergleichen:

Definition 4.2 Für zwei Strecken AB und CD sagen wir AB ist kürzer als CD und CD ist länger als AB , und schreiben $AB < CD$ und $CD > AB$, falls ein Punkt E existiert mit $C * E * D$ und $AB \cong CE$.



Teil (a) der folgenden Proposition besagt, dass der Längenvergleich invariant unter Kongruenz ist, also anschaulich, dass kongruente Strecken dieselbe Länge haben. Alle Teile zusammen besagen, dass die Relation $<$ bis auf Kongruenz die üblichen Eigenschaften einer Totalordnung erfüllt.

Proposition 4.3 (a) Gilt $AB \cong A'B'$ und $CD \cong C'D'$, so ist $AB < CD$ genau dann, wenn $A'B' < C'D'$ ist.

(b) Gilt $AB < CD$ und $CD < EF$, so folgt $AB < EF$.

(c) Für je zwei Strecken AB und CD gilt genau eine der drei Aussagen $AB < CD$, $AB \cong CD$, $AB > CD$.

Beweis Übungsaufgabe.

Die Kongruenzaxiome für Winkel:

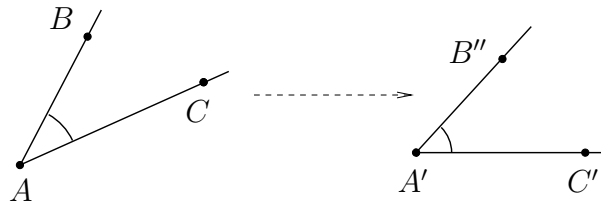
Zum Vergleich von Winkeln dient der letzte Grundbaustein der Theorie:

- Gegeben sei eine Relation \simeq auf der Menge aller Winkel.
- Für $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ sagen wir $\sphericalangle BAC$ ist kongruent zu $\sphericalangle B'A'C'$.

Für die Kongruenz von Winkeln werden die folgenden Axiome gefordert:

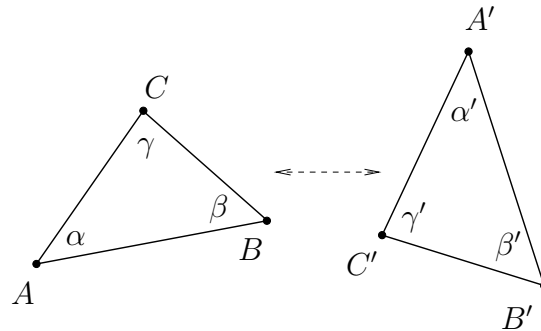
- (K4) Für jeden Winkel $\sphericalangle BAC$, je zwei verschiedene Punkte A' und C' einer Geraden g , und jeden Punkt $D' \notin g$ existiert ein eindeutiger Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $B' \notin g$, so dass $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ ist und B' und D' auf derselben Seite von g liegen.
- (K5) Die Relation \simeq ist eine Äquivalenzrelation.
- (K6) Sind A, B, C nicht kollinear und A', B', C' nicht kollinear, und gilt $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ und $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$ und $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle B'C'A'$.

Das Axiom (K4) bedeutet anschaulich, dass man einen gegebenen Winkel auf eindeutige Weise an eine beliebige Seite eines beliebigen Strahls übertragen kann.



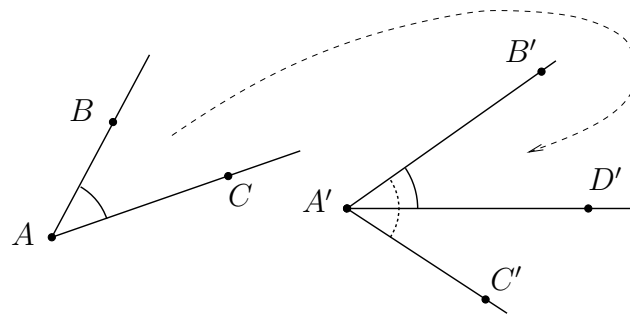
Das Axiom (K6) formuliert den aus der Schule bekannten Satz, dass zwei Dreiecke kongruent sind, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen, gemäss der folgenden Definition:

Definition 4.4 Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ und $AC \cong A'C'$ sowie $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ und $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle B'C'A'$ heissen kongruent.



Wie bei Strecken kann man auch eine Ordnungsrelation auf Winkeln erklären, mit den entsprechenden Eigenschaften:

Definition 4.5 Für zwei Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'C'$ sagen wir $\sphericalangle BAC$ ist kleiner als $\sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle B'A'C'$ ist grösser als $\sphericalangle BAC$, und schreiben $\sphericalangle BAC < \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle B'A'C' > \sphericalangle BAC$, falls ein Punkt D' im Inneren von $\sphericalangle B'A'C'$ existiert mit $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'D'$.



Proposition 4.6 Für beliebige Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ gilt:

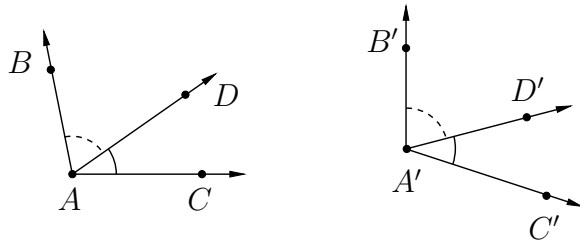
- (a) $\alpha \simeq \alpha' \wedge \beta \simeq \beta' \rightarrow (\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha' < \beta')$.
- (b) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma$.
- (c) Es gilt genau eine der drei Aussagen $\alpha < \beta, \alpha \simeq \beta, \alpha > \beta$.

Beweis Übungsaufgabe. Hinweis zu (c): Nachdem wir die Winkel durch kongruente Winkel ersetzen, können wir oBdA annehmen, dass $\alpha = \sphericalangle BAC$ und $\beta = \sphericalangle BAD$ sind für verschiedene Punkte A und B und Punkte $C, D \notin \overline{AB}$ auf derselben Seite von \overline{AB} . Dann liegt C entweder im Inneren von $\sphericalangle BAD$ oder auf dem Strahl \overrightarrow{AD} oder ausserhalb; im letzteren Fall muss man aus den Lagebeziehungen folgern, dass D im Inneren von $\sphericalangle BAC$ liegt.

Man würde gerne die Summe zweier Winkel $\alpha + \beta$ definieren, indem man einen zu α kongruenten Winkel auf der zu β entgegengesetzten Seite an einen der Schenkel von β

ansetzt und den durch die beiden äusseren Schenkel bestimmten zusammengesetzten Winkel nimmt. Solange die angesetzten Winkel auf derselben Seite einer Geraden durch den gemeinsamen Scheitelpunkt bleiben, das heisst, sofern das Resultat einen gestreckten Winkel (d.h. 180°) nicht erreicht oder überschreitet, ergibt dies einen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmten Winkel. Diese Art der Addition genauso wie ihre Umkehrung ist invariant unter Kongruenz (vgl. Axiom (K3) und Proposition 4.1):

Proposition 4.7 *Für jeden Punkt D im Inneren eines Winkels $\sphericalangle BAC$ und jeden Punkt D' im Inneren eines Winkels $\sphericalangle B'A'C'$ mit $\sphericalangle BAD \simeq \sphericalangle B'A'D'$ gilt $\sphericalangle DAC \simeq \sphericalangle D'A'C'$ genau dann, wenn $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ gilt.*



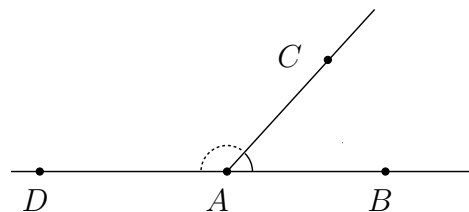
Beweis Übungsaufgabe.

Soweit definiert, hat diese Konstruktion ausserdem dieselben Eigenschaften wie die Summe von Strecken in Proposition 7.4. Gelegentlich erlauben wir uns daher auch ohne förmliche Definition, von der Summe $\alpha + \beta$ oder von einem Vielfachen wie 2α zu sprechen. Wenn die hypothetische Summe aber einen gestreckten Winkel erreicht oder überschreitet, verlassen wir den durch das vorliegende Kalkül gesteckten Rahmen und müssten diesen Rahmen erweitern, um dennoch von der Summe sprechen zu können. Wir verzichten darauf und behelfen uns in diesen Fällen damit, direkt den Prozess des Zusammensetzens zu beschreiben.

Nebenwinkel:

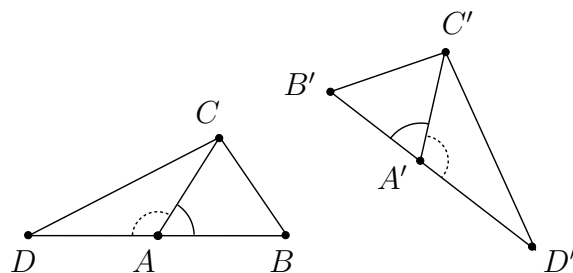
In der folgenden Definition betrachten wir den Fall, dass die „Summe“ zweier Winkel einen gestreckten Winkel ergibt.

Definition 4.8 *Liegt A zwischen B und D auf einer Geraden g , und ist C ein Punkt nicht auf g , so heissen $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle DAC$ Nebenwinkel.*



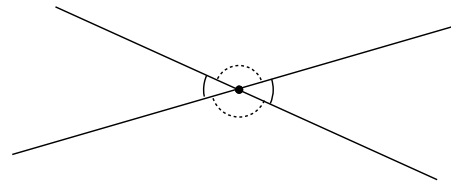
Proposition 4.9 *Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent.*

Beweis. Sei (A', B', C', D') ein zweiter Satz Punkte wie in Definition 4.8, so dass $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ ist. Nach Ersetzen von B', C', D' durch andere Punkte auf ihren jeweiligen Strahlen können wir oBdA annehmen, dass $AB \cong A'B'$ und

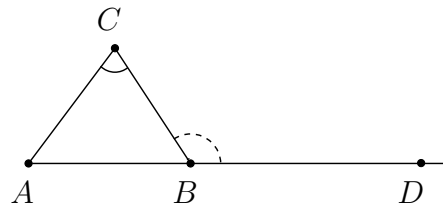


$AC \cong A'C'$ und $AD \cong A'D'$ ist. Nach (K6) sind dann die beiden Dreiecke BAC und $B'A'C'$ kongruent; somit ist $BC \cong B'C'$ und $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA \simeq \sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle C'B'D'$. Nach (K3) ist ausserdem $BD \cong B'D'$. Nach (K6) sind darum die beiden Dreiecke BDC und $B'D'C'$ kongruent; insbesondere ist $CD \cong C'D'$ und $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB \simeq \sphericalangle C'D'B' = \sphericalangle C'D'A'$. Nach (K6) sind daher die beiden Dreiecke CDA und $C'D'A'$ kongruent, und deshalb ist schliesslich $\sphericalangle DAC \simeq \sphericalangle D'A'C'$, was zu zeigen war. \square

Wenn zwei verschiedene Geraden sich in einem Punkt schneiden, so bilden sie dort insgesamt 4 Strahlen und zwischen diesen 4 verschiedenen Winkel. Diese sind paarweise Nebenwinkel voneinander. Jeder Winkel hat also genau zwei Nebenwinkel, und aus Proposition 4.9 folgt sofort, dass je zwei entgegengesetzte Winkel zueinander kongruent sind. Im allgemeinen sind natürlich nicht alle kongruent, darum sollte man nicht von „dem Winkel zwischen zwei Geraden“ sprechen.

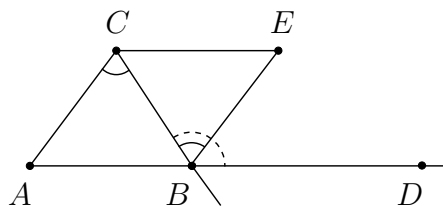


Proposition 4.10 Für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt D mit $A * B * D$ gilt $\sphericalangle BCA < \sphericalangle CBD$.



Beweisidee: Trage den Winkel $\sphericalangle BCA$ auf der zu A entgegengesetzten Seite des Strahls \overrightarrow{BC} ab, das heisst, wähle mit (K4) einen Punkt E auf der zu A entgegengesetzten Seite von \overline{BC} , so dass $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle CBE$ ist. Nach etwaigem Ersetzen von E durch einen anderen Punkt auf dem Strahl \overrightarrow{BE} können wir nach (K1) annehmen, dass ausserdem $CA \cong BE$ ist. Nach (K6) sind dann BCA und CBE kongruente Dreiecke.

Nach Definition der Relation $<$ für Winkel genügt es nun zu zeigen, dass E im Inneren von $\sphericalangle CBD$ liegt. Nach Konstruktion liegt E bereits, wie D , auf der zu A entgegengesetzten Seite der Geraden \overline{BC} , also liegen E und D auf derselben Seite von \overline{BC} . Es bleibt zu zeigen, dass \overline{E} und \overline{C} auf derselben Seite der Geraden $\overline{BD} = \overline{AB}$ liegen. Dies erfordert einige weitere Argumente mit Hilfe des Lageaxioms (L4), für die man benutzen kann, dass BCA und CBE kongruent sind.

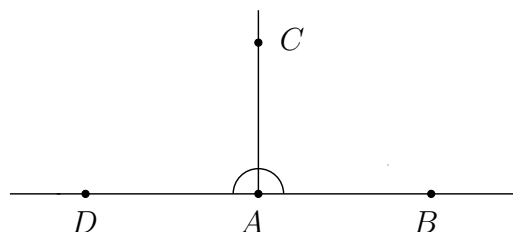


Bemerkung: In der obigen Proposition ist $\sphericalangle CBD$ ein Nebenwinkel von $\sphericalangle ABC$; die Aussage können wir also interpretieren als „ $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC < 180^\circ$ “. Natürlich folgt dies, sobald wir wissen, dass die Summe aller drei Winkel des Dreiecks einem gestreckten Winkel gleicht, wie in Proposition 5.7. Letzteres erfordert jedoch das Parallelenaxiom, während der obige Beweis ohne dieses auskommt. Ohne das Parallelenaxiom kann man auch beweisen, dass „die Summe der drei Winkel jedes Dreiecks $\leq 180^\circ$ “ ist, das heisst, wenn man dazu kongruente Winkel aneinandersetzt, liegen alle drei immer noch

auf einer Seite einer Geraden. In der hyperbolischen Geometrie, in der alle Hilbertschen Axiome ausser das Parallelenaxiom gelten, ist die Winkelsumme jedes Dreiecks tatsächlich echt kleiner als der gestreckte Winkel.

Rechte Winkel:

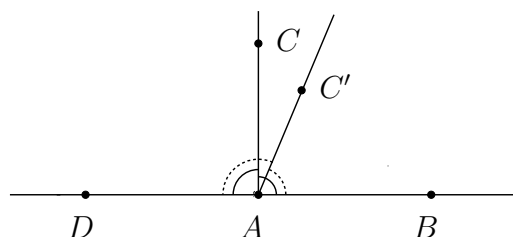
Definition 4.11 Ein Winkel $\sphericalangle BAC$, der kongruent zu einem seiner Nebenwinkel ist, heisst rechter Winkel. Die Strahlen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} , oder die Strecken \overline{AB} und \overline{AC} , oder die Geraden \overline{AB} und \overline{AC} heissen dann senkrecht zueinander oder orthogonal; in Symbolen $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.



Sind zwei Geraden orthogonal in einem Punkt A , so ist jeder der vier Winkel dort ein rechter; die Bedingung hängt also nicht von der Auswahl von Strahlen auf den Geraden ab.

Proposition 4.12 Je zwei rechte Winkel sind kongruent.

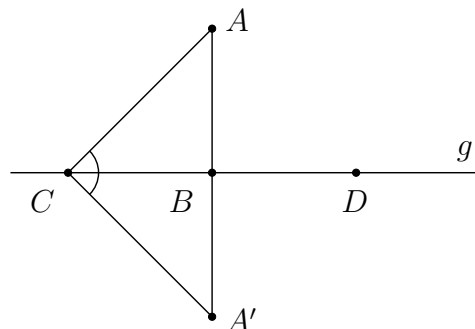
Beweis. Wenn nicht, seien α und β zwei rechte Winkel, die nicht kongruent sind. Dann ist einer kleiner, sagen wir $\alpha < \beta$. Nach Ersetzen von α durch einen kongruenten Winkel ist dann $\beta = \sphericalangle BAC$ und $\alpha = \sphericalangle BAC'$ für einen Punkt C' im Inneren von $\sphericalangle BAC$. Sei D ein Punkt auf \overline{AB} auf der zu B entgegengesetzten Seite von A .



Dann liegen B und C auf entgegengesetzten Seiten der Geraden $\overline{AC'}$, und somit liegen C und D auf derselben Seite der Geraden $\overline{AC'}$. Da C und C' sowieso auf derselben Seite von $\overline{AD} = \overline{AB}$ liegen, folgt, dass C im Inneren des Winkels $\sphericalangle DAC'$ liegt. Somit ist $\beta' := \sphericalangle DAC < \sphericalangle DAC' =: \alpha'$. Aber β' ist Nebenwinkel von β , also kongruent zu β , und genauso ist α' kongruent zu α . Aus Proposition 4.6 (a) folgt daher nun $\beta < \alpha$. Da aber auch $\alpha < \beta$ ist, widerspricht das Proposition 4.6 (c). \square

Proposition 4.13 Für jede Gerade g und jeden Punkt $A \notin g$ existiert genau ein Punkt $B \in g$, so dass $\overline{AB} \perp g$ ist.

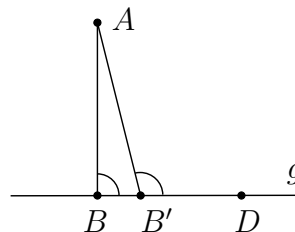
Beweis. Für die Existenz wähle zwei verschiedene Punkte $C, D \in g$. Trage den Winkel $\sphericalangle ACD$ auf der zu A entgegengesetzten Seite des Strahls \overrightarrow{CD} ab, das heisst, wähle mit (K4) einen Punkt A' auf der zu A entgegengesetzten Seite von g , so dass



$\sphericalangle ACD \simeq \sphericalangle A'CD$ ist. Nach etwaigem Ersetzen von A' durch einen anderen Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{CA'}$ können wir nach (K1) annehmen, dass ausserdem $CA \cong CA'$ ist. Da A und A' auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, enthält g einen (eindeutigen) Punkt B zwischen A und A' . Wir zeigen, dass dieser die gesuchte Eigenschaft hat.

Wenn $B = C$ ist, so sind $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD \simeq \sphericalangle A'CD = \sphericalangle A'BD$ bereits kongruente Nebenwinkel, also rechte Winkel, wie gewünscht. Andernfalls sind C, A, B nicht kollinear und bilden somit ein Dreieck CAB . Genauso haben wir ein Dreieck $CA'B$. Wenn B und D auf derselben Seite von C auf g liegen, so sind $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle A'CB = \sphericalangle A'CD$ und somit $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle A'CB$. Andernfalls ist $\sphericalangle ACB$ ein Nebenwinkel von $\sphericalangle ACD$, und $\sphericalangle A'CB$ ist ein Nebenwinkel von $\sphericalangle A'CD$, und nach Proposition 4.9 folgt ebenfalls $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle A'CB$. Aus (K2) und (K6) folgt nun, dass die Dreiecke ACB und $A'CB$ kongruent sind. Also sind $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'BC$ kongruent. Aber weil B nach Konstruktion zwischen A und A' liegt, sind diese Winkel sind Nebenwinkel zueinander und somit rechte Winkel, wie erhofft. Damit ist die Existenz bewiesen.

Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Punkte $B, B' \in g$ mit $\overline{AB} \perp g$ und $\overline{AB'} \perp g$. Sei D ein Punkt auf g mit $B * B' * D$. Dann ist ABB' ein Dreieck mit dem rechten Innenwinkel $\sphericalangle ABB'$ und dem gegenüberliegenden rechten Aussenwinkel $\sphericalangle AB'D$. Da nach Proposition 4.12 je zwei rechte Winkel kongruent sind, widerspricht das der Proposition 4.10. Also war die Annahme falsch, und der Punkt B ist eindeutig. \square



Proposition 4.14 *Rechte Winkel existieren.*

Beweis. Direkte Folge aus Proposition 4.13 sowie der Existenz einer Geraden g und eines Punktes nicht auf g . \square

Halbieren:

Proposition 4.15 *Für jede Strecke AB existiert ein eindeutiger Punkt C zwischen A und B mit $AC \cong BC$, genannt Mittelpunkt von AB .*

Beweis Übungsaufgabe.

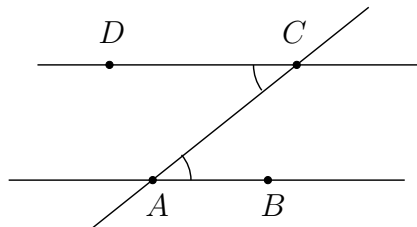
Proposition 4.16 *Für jeden Winkel $\sphericalangle BAC$ existiert ein Punkt D im Inneren von $\sphericalangle BAC$ mit $\sphericalangle BAD \simeq \sphericalangle DAC$. Der Strahl \overrightarrow{AD} ist eindeutig bestimmt und heisst die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$.*

Beweis Übungsaufgabe.

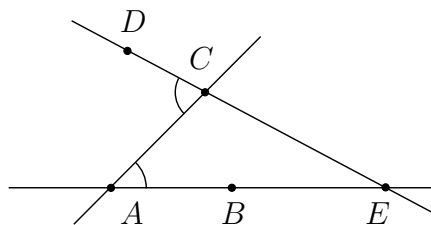
5 Parallelen

Definition 5.1 Zwei Geraden heissen parallel, wenn sie gleich oder disjunkt sind. In Symbolen $g \parallel h$.

Proposition 5.2 Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, so dass B und D auf entgegengesetzten Seiten der Geraden \overline{AC} liegen. Wenn ausserdem $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle ACD$ ist, sind die Geraden \overline{AB} und \overline{CD} parallel.



Beweis. Wenn nicht, so schneiden sich \overline{AB} und \overline{CD} in einem Punkt E . Dieser liegt nicht auf \overline{AC} (wieso genau?); nach etwaigem Vertauschen des Paares (A, B) mit (C, D) können wir oBdA annehmen, dass er auf der gleichen Seite von \overline{AC} liegt wie B . Dann ist $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CAB$ ein Innenwinkel und $\sphericalangle ACD$ ein Aussenwinkel an einer anderen Ecke des Dreiecks ACE . Nach Proposition 4.10 gilt daher $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ACD$, im Widerspruch zur Annahme. \square



Folge 5.3 Für jede Gerade g und jeden Punkt A nicht auf g existiert eine Parallele zu g durch A .

Beweis. Wähle zwei verschiedene Punkte $C, D \in g$ und finde mit (K4) einen Punkt B auf der zu D entgegengesetzten Seite von \overline{AC} mit $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle ACD$. Dann hat \overline{AB} die gewünschten Eigenschaften. \square

Das Parallelenaxiom:

Bis hier haben wir das Parallelenaxiom noch nicht verwendet; von nun an setzen wir es aber voraus:

(P) Ist g eine Gerade und A ein Punkt nicht auf g , so gibt es höchstens eine Gerade durch A , welche g nicht schneidet.

Zusammen mit Folge 5.3 sowie dem einfachen Spezialfall $A \in g$ erhalten wir daraus:

Folge 5.4 Für jede Gerade g und jeden Punkt A existiert genau eine Parallele zu g durch A .

Proposition 5.5 Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte, so dass B und D auf entgegengesetzten Seiten der Geraden \overline{AC} liegen, so gilt $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle ACD$ genau dann, wenn die Geraden \overline{AB} und \overline{CD} parallel sind.

Beweis. Die Richtung „ \Rightarrow “ ist Proposition 5.2. Für die Richtung „ \Leftarrow “ finde mit (K4) einen Punkt B' auf der zu D entgegengesetzten Seite von \overline{AC} mit $\sphericalangle CAB' \simeq \sphericalangle ACD$. Nach Proposition 5.2 ist dann $\overline{AB'}$ parallel zu \overline{CD} ; aufgrund der Eindeutigkeit der Parallelen also gleich \overline{AB} . Daher ist $\sphericalangle CAB' = \sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle ACD$. \square

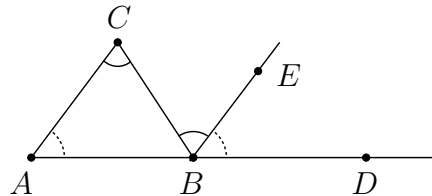
Bemerkung: Euklid hatte die Richtung „ \Leftarrow “ von Proposition 5.5 als Parallelenaxiom, und man sieht leicht, dass diese umgekehrt (P) impliziert. Heute zieht man (P) als Axiom vor, vielleicht weil es als rein qualitative Aussage gegenüber der quantitativen Aussage von Proposition 5.5 etwas fundamentaler erscheint. Eine weitere zu (P) äquivalente Aussage ist die folgende:

Proposition 5.6 *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie folgen direkt aus der Definition. Für die Transitivität seien $g \parallel h$ und $h \parallel k$. Wenn g und k disjunkt sind, sind sie parallel und wir sind fertig. Wenn sie einen Punkt A gemeinsam haben, so sind beides Parallelen zu h durch A , und daher nach dem Parallelenaxiom gleich und somit ebenfalls parallel. \square

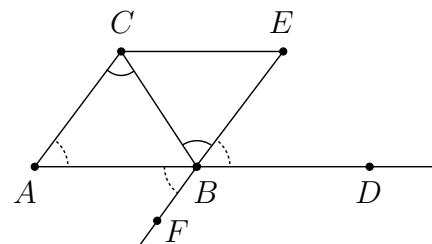
Winkelsumme im Dreieck:

Proposition 5.7 *Für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt D mit $A * B * D$ existiert ein Punkt E im Innern von $\sphericalangle CBD$, so dass $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle CBE$ ist und $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle EBD$.*



(Das heisst: Die Summe aller Winkel des Dreiecks gleicht einem gestreckten Winkel.)

Beweis. Konstruiere den Punkt E wie im Beweis von Proposition 4.10. Dann liegt E im Inneren von $\sphericalangle CBD$ und es gilt $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle CBE$. Aus letzterer Relation folgt mit der Richtung „ \Rightarrow “ von Proposition 5.5, dass \overline{AC} und \overline{BE} parallel sind. Sei F ein Punkt mit $F * B * E$. Dann liegen F und E auf entgegengesetzten Seiten von \overline{AB} , während E und C auf derselben Seite von \overline{AB} liegen; also liegen F und C auf entgegengesetzten Seiten von \overline{AB} . Da \overline{AC} und $\overline{BE} = \overline{BF}$ parallel sind, folgt nun mit der Richtung „ \Leftarrow “ von Proposition 5.5, dass $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle ABF$ ist. Nach Proposition 4.9 ist aber $\sphericalangle ABF \simeq \sphericalangle EBD$, also ist $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle EBD$, und wir sind fertig. \square



Proposition 5.8 *Für je zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ und $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle B'C'A'$ gilt auch $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle C'A'B'$.*

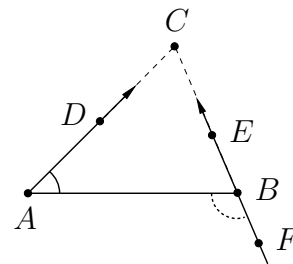
Beweis. (Skizze) Wähle D und E wie in Proposition 5.7, sowie D' und E' mit den analogen Eigenschaften für das Dreieck $A'B'C'$. Dann sind $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ und $\sphericalangle CBE \simeq \sphericalangle C'B'E'$. Mit Hilfe von Proposition 4.7 zeigt man dann schnell, dass auch $\sphericalangle EBD \simeq \sphericalangle E'B'D'$ ist; also ist $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle C'A'B'$, wie gewünscht. \square

Konstruktionen:

Mit „konstruieren“ meint man in dem vorliegenden Zusammenhang „beweisen, dass Punkte mit bestimmten Eigenschaften existieren“. Überlegen wir kurz, welche Konstruktionsmöglichkeiten wir bisher haben. Mit dem Axiom (K1) können wir eine gegebene Strecke auf einem gegebenen Strahl abtragen, wodurch wir einen neuen Punkt auf diesem Strahl erhalten. Mit dem Axiom (K4) können wir einen gegebenen Winkel an einen gegebenen Strahl abtragen, wodurch wir einen neuen Strahl erhalten und darauf Punkte wählen können. Das einzige der bisherigen Axiome, das unter gewissen Bedingungen einen Schnittpunkt zweier Geraden liefert, ist (L4), denn es besagt ja äquivalent: Sei g eine Gerade, und seien A, B, C nicht kollineare Punkte ausserhalb von g , so dass ein Punkt in $g \cap AB$ existiert; dann existiert ein Punkt in $g \cap AC$ oder in $g \cap BC$, aber nicht beides. Auch die Konstruktion in Proposition 3.25 beruht auf dem Axiom (L4). Mit den genannten Mitteln können wir aber noch nicht allgemein entscheiden, wann zwei Geraden sich schneiden. Das wird erst durch das Parallelenaxiom ermöglicht, denn es besagt ja äquivalent, dass nur ganz bestimmte Paare von Geraden disjunkt sind, nämlich solche wie in Proposition 5.5.

Eine bestimmte Konstruktion, die ohne das Parallelenaxiom im allgemeinen nicht möglich ist, ist die folgende. Sie besagt, dass man für je zwei Winkel α und β mit „ $\alpha + \beta < 180^\circ$ “ auf jeder Strecke AB ein Dreieck ABC errichten kann mit $\sphericalangle CAB \simeq \alpha$ und $\sphericalangle CBA \simeq \beta$. Wir formulieren dies mit Aussenwinkeln wie in Proposition 4.10:

Proposition 5.9 Sei AB eine Strecke, seien D und E Punkte auf derselben Seite von AB , und sei F ein Punkt mit $E * B * F$, so dass $\sphericalangle BAD < \sphericalangle ABF$ ist. Dann haben die Strahlen \overrightarrow{AD} und \overrightarrow{BE} einen Punkt C gemeinsam.



Beweis. Nach Proposition 5.5 sind die Geraden \overrightarrow{AD} und \overrightarrow{BE} nicht parallel, haben also einen Punkt C gemeinsam. Da die beiden Geraden die Gerade \overline{AB} nur in A , bzw. B schneiden, liegt C nicht auch auf \overline{AB} . Wenn C und F auf derselben Seite von \overline{AB} lägen, so wäre $\sphericalangle ABC$ ein Innenwinkel und $\sphericalangle BAD$ ein gegenüberliegender Aussenwinkel des Dreiecks ABC ; nach Proposition wäre also $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC < \sphericalangle BAD$. Dies widerspricht aber der Annahme; also liegt C auf derselben Seite von \overline{AB} wie D und E und somit in $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE}$, wie gewünscht. \square

6 Angeordnete Körper

Definition 6.1 Ein angeordneter Körper ist ein Körper K zusammen mit einer Teilmenge P , welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (a) Für alle $a, b \in P$ gilt $a + b \in P$ und $ab \in P$.
- (b) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der Aussagen $a \in P$ oder $a = 0$ oder $-a \in P$.

Für jedes $a \in P$ heisst a positiv und $-a$ negativ. Für $a, b \in K$ mit $a - b \in P$ heisst a grösser als b und b kleiner als a und wir schreiben $a > b$ und $b < a$. Für $\neg(a > b)$ schreiben wir $a \leq b$ und $b \geq a$.

Proposition 6.2 (a) Für je zwei $a, b \in K$ gilt genau eine der Aussagen $a > b$ oder $a = b$ oder $a < b$.

- (b) Für je drei $a, b, c \in K$ mit $a < b$ und $b < c$ gilt $a < c$.
- (c) Für jedes $a \in K \setminus \{0\}$ gilt $a^2 > 0$. Insbesondere gilt $1 > 0$.

Beweis. Teil (a) folgt direkt aus 6.1 (b). Teil (b) bedeutet, dass aus $b - a \in P$ und $c - b \in P$ stets $c - a = (c - b) + (b - a) \in P$ folgt, was nach 6.1 (a) gilt. In (c) ist entweder $a > 0$ und dann $a^2 = a \cdot a \in P$ nach 6.1 (a), oder $a < 0$ und dann $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$ nach 6.1 (a). \square

Ähnlich zeigt man, dass in jedem angeordneten Körper die gleichen Rechenregeln für Ungleichungen gelten wie in \mathbb{R} , zum Beispiel: $a > b > 0 \rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$ und andere.

Definition 6.3 (a) Ein Homomorphismus von Körpern ist eine Abbildung $f: K \rightarrow L$ mit den Eigenschaften $f(a + b) = f(a) + f(b)$ und $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in K$ sowie $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

- (b) Ein Homomorphismus von angeordneten Körpern ist ein Homomorphismus mit der zusätzlichen Eigenschaft $a > b \rightarrow f(a) > f(b)$ für alle $a, b \in K$.

Proposition 6.4 Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv und erfüllt für alle $a, b \in K$ auch $f(a - b) = f(a) - f(b)$, sowie $f(a/b) = f(a)/f(b)$ falls $b \neq 0$ ist.

Beweis. Gilt $a \neq b$ in K , so folgt aus $(a - b) \cdot \frac{1}{a-b} = 1$ in K auch $f(a - b) \cdot f\left(\frac{1}{a-b}\right) = f\left((a - b) \cdot \frac{1}{a-b}\right) = f(1) = 1$ in L ; also ist $f(a) - f(b) = f(a - b) \neq 0$ und somit $f(a) \neq f(b)$ in L . Der Rest folgt aus ähnlichen Rechnungen. \square

Eine injektive Abbildung nennt man oft auch eine *Einbettung*; eine Einbettung von Körpern ist also einfach ein Körperhomomorphismus.

Proposition 6.5 Für jeden angeordneten Körper K existiert ein eindeutiger Homomorphismus von angeordneten Körpern $f: \mathbb{Q} \rightarrow K$.

Beweis. Da man jede rationale Zahl unter Anwendung der vier Rechenoperationen aus den Zahlen 0 und 1 herstellen kann und f mit diesen Rechenoperationen verträglich sein muss, ist die Abbildung eindeutig, wenn sie existiert. Die gleiche Überlegung liefert auch eine Konstruktion: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ definiere man

$$f(n) := \begin{cases} 1 + \dots + 1 & \text{mit } n \text{ Summanden für } n > 0, \\ 0 & \text{für } n = 0, \\ -(1 + \dots + 1) & \text{mit } -n \text{ Summanden für } n < 0. \end{cases}$$

Durch verschiedene Fallunterscheidungen zeigt man dann für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die Formeln $f(m+n) = f(m) + f(n)$ und $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ sowie die Implikation $m < n \rightarrow f(m) < f(n)$. Insbesondere gilt für je zwei $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ auch $f(n) \neq 0$ und somit ergibt der Ausdruck $f(m)/f(n)$ einen Sinn in K . Durch explizite Rechnung zeigt man, dass dieser nur von $m/n \in \mathbb{Q}$ abhängt, so dass man durch $f(m/n) := f(m)/f(n)$ eine wohldefinierte Abbildung $f: \mathbb{Q} \rightarrow K$ erhält. Schliesslich zeigt man durch weitere explizite Rechnungen, dass dieser die entsprechenden Bedingungen für einen Homomorphismus von angeordneten Körpern erfüllt. \square

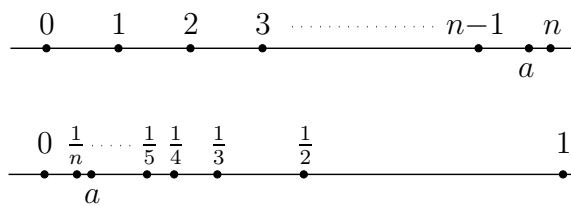
Da der obige Homomorphismus f injektiv und mit allen Rechenoperationen und Ungleichungen verträglich ist, können wir \mathbb{Q} mittels dieser Inklusion mit seinem Bild in K identifizieren. Wir können damit \mathbb{Q} als einen Unterkörper von K auffassen im folgenden Sinn:

Definition 6.6 Ein Unterkörper eines Körpers K ist eine Teilmenge K' mit den Eigenschaften $a + b \in K'$ und $ab \in K'$ für alle $a, b \in K'$ sowie $0, 1 \in K'$, welche mit den induzierten Rechenoperationen ebenfalls einen Körper bildet.

Definition 6.7 Ein angeordneter Körper K heisst archimedisch, falls gilt:

$$\forall a \in K \exists n \in \mathbb{Z} : n > a.$$

Das Axiom besagt anschaulich, dass K an der Einheit 1 gemessen keine ‘unendlich grossen’ Elemente enthält. Umgekehrt enthält K dann auch keine infinitesimal kleinen Elemente:



Proposition 6.8 In jedem archimedisch angeordneten Körper gilt auch

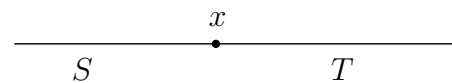
$$\forall a \in K : a > 0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^{>0} : 0 < \frac{1}{n} < a.$$

Beweis. Nach dem Axiom existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > \frac{1}{a}$. Ausserdem gilt $\frac{1}{a} > 0$ und somit $a > \frac{1}{n} > 0$. \square

Schliesslich interessieren wir uns noch für das folgende Axiom:

Axiom 6.9 (Dedekind) Für jede Zerlegung von K in disjunkte nichtleere Teilmengen S und T mit der Eigenschaft $\forall s \in S \forall t \in T : s < t$ existiert genau ein $x \in K$ mit der Eigenschaft $\forall s \in S \forall t \in T : s \leq x \leq t$.

Dieses besagt anschaulich, dass es keine ‘Lücken’ in der Anordnung von K gibt. Man kann zeigen, dass das Dedekind-Axiom die Bedingung „archimedisch“ impliziert.



Für die Zwecke dieser Vorlesung setzen wir voraus, dass der Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} mit der üblichen Anordnung archimedisch ist und das Dedekind-Axiom erfüllt. Der folgende Satz impliziert, dass diese Eigenschaften die reellen Zahlen sogar bis auf eindeutige Isomorphie charakterisieren; man kann sie daher als vollständige Axiome für \mathbb{R} ansehen.

Satz 6.10 *Ein angeordneter Körper K lässt sich nach \mathbb{R} einbetten genau dann, wenn er archimedisch ist, und dann ist die Einbettung eindeutig. Diese Einbettung ist ein Isomorphismus genau dann, wenn K zusätzlich das Dedekind-Axiom erfüllt.*

Beweis. Sei K archimedisch. Für jedes Element $x \in K$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ existieren dann Elemente $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 2^n x$ und $b > -2^n x$ in K , also $-b < 2^n x < a$. Da zwischen $-b$ und a nur endlich viele ganze Zahlen liegen, existiert somit ein eindeutiges $b_n \in \mathbb{Z}$ mit $b_n \leq 2^n x < b_n + 1$. Dann ist $a_n := \frac{b_n}{2^n}$ ein eindeutiges Element von $\frac{1}{2^n} \mathbb{Z}$ mit $a_n \leq x < a_n + \frac{1}{2^n}$. Daraus folgt schnell $a_n \leq a_{n+1}$ und $a_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq a_n + \frac{1}{2^n}$. Also bildet (a_n) eine aufsteigende und $(a_n + \frac{1}{2^n})$ eine absteigende Cauchyfolge in \mathbb{Q} , welche in \mathbb{R} gegen dieselbe Zahl konvergieren. Wir definieren die gesuchte Abbildung $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Durch direkte Rechnung (Übung!) zeigt man, dass diese ein Homomorphismus von angeordneten Körpern ist. Also existiert eine Einbettung $K \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Sei nun $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiger Homomorphismus von angeordneten Körpern. Mit den obigen Notationen implizieren die Ungleichungen $a_n \leq x < a_n + \frac{1}{2^n}$ in K dann die Ungleichungen $a_n \leq \psi(x) < a_n + \frac{1}{2^n}$ in \mathbb{R} . Für $n \rightarrow \infty$ folgt daraus, dass $\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \varphi(x)$ sein muss. Dies zeigt die Eindeutigkeit der Einbettung.

Für den Rest des Beweises identifizieren wir K mit seinem Bild unter der Einbettung, betrachten also K als einen Unterkörper von \mathbb{R} mit der induzierten Anordnung. Im Fall $K = \mathbb{R}$ erfüllt K natürlich wie \mathbb{R} das Dedekind-Axiom. Nehmen wir umgekehrt an, dass K das Dedekind-Axiom erfüllt. Dann ist zu zeigen, dass jedes $\xi \in \mathbb{R}$ schon in K liegt. Seien dafür $S := \{\eta \in \mathbb{R} \mid \eta < \xi\}$ und $T := \mathbb{R} \setminus S$. Dann erfüllen S und T die Bedingungen des Dedekind-Axioms in \mathbb{R} und bestimmen die Zahl ξ . Da \mathbb{R} archimedisch ist, sind sowohl $S \cap \mathbb{Z}$ als auch $T \cap \mathbb{Z}$ nicht leer. Daher sind auch $S \cap K$ und $T \cap K$ nicht leer und erfüllen somit die Bedingungen des Dedekind-Axioms in dem Unterkörper K . Sie definieren also ein Element $x \in K$ mit der Eigenschaft $\forall s \in S \cap K \forall t \in T \cap K : s \leq x \leq t$. Die entsprechende Eigenschaft gilt auch für ξ anstelle von x . Wäre also $x \neq \xi$, so wüssten wir in \mathbb{R} , dass ein $r \in \mathbb{Q}$ existiert mit $x < r < \xi$ oder $x > r > \xi$; dieses wäre dann entweder in $S \cap K$ oder in $T \cap K$, und jeder dieser Fälle führt zu einem Widerspruch. Also gilt $x = \xi$, und somit ist $\xi = x \in K$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 6.11 Oft werden die reellen Zahlen konstruiert als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in \mathbb{Q} modulo Nullfolgen. Dedekinds Idee führt zu einer völlig anderen Konstruktion. Eine Zerlegung von \mathbb{Q} in disjunkte nichtleere Teilmengen S und T mit der Eigenschaft $\forall s \in S \forall t \in T: s < t$, so dass S kein maximales Element enthält, nennt man heute einen *Dedekind-Schnitt*. Jede reelle Zahl x definiert einen Dedekind-Schnitt durch $S := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$ und $T := \mathbb{Q} \setminus S$. Ähnlich wie im obigen Beweis zeigt man, dass dies eine Bijektion von \mathbb{R} auf die Menge aller Dedekind-Schnitte induziert. Wenn man die reellen Zahlen noch nicht hat, kann man daher umgekehrt vorgehen und sie einfach als Dedekind-Schnitte definieren (ohne Bildung von Äquivalenzklassen!) und muss nur noch die Rechenoperationen darauf erklären und alle Eigenschaften nachweisen.

Beispiele für archimedisch angeordnete Körper sind alle Unterkörper von \mathbb{R} mit der induzierten Anordnung, zum Beispiel \mathbb{Q} , oder der quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, oder der Unterkörper aller algebraischen reellen Zahlen. Dabei heisst eine Zahl x algebraisch (über \mathbb{Q}), falls eine natürliche Zahl n und Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ existieren mit $a_n \neq 0$ und $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$.

Viele interessante Körper besitzen keine Anordnung. Wegen Proposition 6.5 muss jeder angeordnete Körper \mathbb{Q} enthalten, kann also insbesondere nicht endlich sein. Auch \mathbb{C} besitzt keine Anordnung, da in \mathbb{C} jedes Element ein Quadrat ist, also positiv nach Proposition 6.2 (c), und nach Definition jeder angeordnete Körper auch negative Elemente besitzen muss.

Erstaunlicherweise gibt es angeordnete Körper, die nicht archimedisch sind:

Beispiel 6.12 Sei $\mathbb{R}(t)$ der Körper aller rationalen Funktionen in einer Variablen t mit Koeffizienten in \mathbb{R} . Seine genaue Definition ist eigentlich eine Sache der Algebra; wir begnügen uns hier mit einer etwas vagen Definition. Seien f und $g \neq 0$ Polynome in einer Variablen mit Koeffizienten in \mathbb{R} , und sei S eine endliche Teilmenge von \mathbb{R} , welche alle Nullstellen von g enthält. Dann nennen wir $\mathbb{R} \setminus S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ eine *rationale Funktion mit Koeffizienten in \mathbb{R}* und bezeichnen sie mit $\frac{f(t)}{g(t)}$. Dabei ist t durchweg als ein Symbol anzusehen und nicht als eine (eingesetzte) reelle Zahl. Zwei solche Funktionen mit jeweiligen Definitionsbereichen $\mathbb{R} \setminus S$ und $\mathbb{R} \setminus S'$ sehen wir als gleich an, wenn sie auf einem kleineren Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus S''$ für irgendeine endliche Teilmenge $S'' \subset \mathbb{R}$ mit $S \cup S' \subset S''$ übereinstimmen. Mit anderen Worten, wir betrachten Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation. Solche Funktionen können wir wie üblich werteweise addieren und multiplizieren auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche. Man zeigt, dass diese dann einen Körper bilden.

Bis hier haben wir eine Standardkonstruktion. Die Ordnung auf $\mathbb{R}(t)$ ist dagegen etwas speziell und arbiträr. Wir nennen ein Element $h \in \mathbb{R}(t)$ positiv, wenn ein $b_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > b_0$ der Wert $h(x)$ definiert und positiv ist. Diese Eigenschaft betrifft also das asymptotische Verhalten von $h(x)$ für $x \rightarrow \infty$; insbesondere hängt sie nur von der Äquivalenzklasse ab. Man sieht sofort, dass Summe und Produkt zweier positiver rationaler Funktionen wieder positiv sind. Wir

behaupten, dass jede rationale Funktion entweder positiv oder Null oder negativ ist. Sei dafür $h(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ ungleich Null. Dann ist $f \neq 0$ und hat nur endlich viele Nullstellen. Es existiert also eine gemeinsame obere Schranke $b_0 \in \mathbb{R}$ für S und für alle Nullstellen von f . Die eingeschränkte Funktion $]b_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ ist also stetig und hat keine Nullstellen. Nach dem Zwischenwertsatz gilt demnach entweder $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ für alle $x > b_0$, oder $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ für alle $x > b_0$. Nach Definition ist dann also entweder $h > 0$ oder $h < 0$, was zu zeigen war. Also ist $\mathbb{R}(t)$ ein angeordneter Körper.

Schliesslich bemerken wir, dass $t - n > 0$ ist für jede ganze Zahl n , denn für alle $x > b_0 := n$ ist der Wert dieser Funktion ja $x - n > b_0 - n = 0$. Also ist $t > n$ für jede ganze Zahl, und somit ist $\mathbb{R}(t)$ nicht archimedisch. Anschaulich gesprochen ist t ein „unendlich grosses“ Element des Körpers, solange wir mit dem Massstab 1 messen. Da entsprechend auch $t^2 > nt$ ist für jede ganze Zahl n , ist t^2 unendlich gross bezüglich des Massstabs t , also gewissermassen eine noch höhere Ordnung von unendlich. Und so weiter. Umgekehrt folgt aus $t > n$ für alle ganzen Zahlen $n > 0$ auch $0 < \frac{1}{t} < \frac{1}{n}$. Somit ist $\frac{1}{t}$ „infinitesimal klein“ mit dem Massstab 1 gemessen, jedoch ungleich Null. Das Element $\frac{1}{t+1}$ ist ein bisschen kleiner als $\frac{1}{t}$, und $\frac{1}{t^2}$ ist noch um eine unendliche Grössenordnung kleiner, und so weiter.

Das Beispiel zeigt übrigens, dass Leibniz's Idee von infinitesimalen Grössen durchaus ihre Berechtigung hatte. Man kann sie mit einigen Mühen mit der heute gebotenen Strenge als Grundlage für die Analysis verwenden, jedoch hat sich zu Recht die Grundlegung mittels des Konvergenzbegriffs durchgesetzt.

Im nächsten Kapitel werden wir die Beziehung zwischen euklidischen Ebenen und angeordneten Körpern besprechen und sehen, dass die Stetigkeitsaxiome (S1) und (S2) genau dem obigen archimedischen und Dedekindschen Axiom entsprechen.

7 Koordinaten

Bisher haben wir reine Geometrie betrieben, ohne Zahlen oder Masseinheiten oder Koordinaten. In der Kongruenz von Strecken steckt durchaus eine Vorstellung davon, wann zwei Strecken gleich lang sind, jedoch noch ohne einen numerischen Begriff für Länge. In der Identifikation von Längen mit positiven reellen Zahlen liegt ein gewaltiger konzeptioneller Schritt, welcher die Grundlage für die Koordinatisierung der Geometrie darstellt. Wir werden behandeln, wie man von reellen Zahlen ausgehend zur Geometrie kommt, und umgekehrt, wie man von einer euklidischen Ebene ausgehend die reellen Zahlen konstruieren und deren Rechenoperationen und Eigenschaften alleine aus den geometrischen Daten herleiten kann.

Grundlegender Begriff dafür ist der folgende. Immer wenn man von Mengen mit gewissen Zusatzstrukturen spricht, wie zum Beispiel von Gruppen, Ringen oder Vektorräumen usw., dann versteht man unter einem *Isomorphismus* zwischen zwei solchen mathematischen Objekten eine Bijektion der unterliegenden Mengen, welche mit den Zusatzstrukturen verträglich ist. Die Verträglichkeit muss man im allgemeinen in beide Richtungen fordern, auch wenn die Verträglichkeit in eine Richtung zusammen mit der Bijektivität oft schon die Verträglichkeit in die andere Richtung impliziert. Objekte, zwischen denen ein Isomorphismus existiert, heißen *isomorph*. Jeder Satz, der in dem einen Objekt gilt und der keine weiteren vom Isomorphismus nicht abgedeckten Zusatzstrukturen wie z.B. ausgewählte Elemente betrifft, überträgt sich automatisch auf jedes dazu isomorphe Objekt. Dies rechtfertigt die griechische Wortbildung „isomorph“ für „gleiche Form“.

In unserem Fall lautet die Definition eines Isomorphismus wie folgt:

Definition 7.1 Seien $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ und $(\mathcal{E}', \mathcal{G}', \mathcal{Z}', \cong', \simeq')$ zwei Geometrien, das heisst Daten wie oben, welche nicht notwendigerweise die Hilbertaxiome erfüllen. Ein Isomorphismus von Geometrien ist eine Abbildung $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ mit den Eigenschaften:

- (a) sie ist bijektiv,
- (b) eine Teilmenge $g \subset \mathcal{E}$ ist eine Gerade genau dann, wenn $\varphi(g)$ eine Gerade ist,
- (c) $A * B * C$ gilt genau dann, wenn $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$ ist,
- (d) $AB \cong A'B'$ gilt genau dann, wenn $\varphi(A)\varphi(B) \cong \varphi(A')\varphi(B')$ ist, und
- (e) $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ genau dann, wenn $\sphericalangle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \simeq \sphericalangle \varphi(A')\varphi(B')\varphi(C')$ ist.

Aus der Definition von Strecken, Strahlen, Dreiecken, rechten Winkeln usw. folgt direkt, dass diese unter allen Isomorphismen auf ebensolche abgebildet werden.

Die kartesische Ebene:

Für das Standardmodell einer euklidischen Ebene betrachten wir den Vektorraum \mathbb{R}^2 mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle (x, y), (x', y') \rangle := xx' + yy'$ und der dazugehörigen

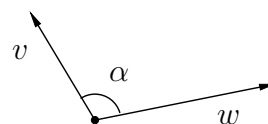
euklidischen Norm $|(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Wir benutzen die üblichen Rechenoperationen im \mathbb{R}^2 . Nolens volens schreiben wir die Elemente von \mathbb{R}^2 als Zeilenvektoren.

Definition 7.2 Die kartesische Ebene besteht aus den folgenden Daten:

- (a) Die Menge der Punkte ist $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2$.
- (b) Die Geraden sind die Teilmengen der Form $g = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid ax + by + c = 0\}$ für beliebige reelle Zahlen a, b, c mit $(a, b) \neq (0, 0)$.
- (c) Ein Punkt B liegt zwischen Punkten A und C genau dann, wenn $A \neq C$ ist und eine reelle Zahl $0 < t < 1$ existiert mit $B = tA + (1 - t)C$.
- (d) Zwei Strecken AB und $A'B'$ heißen kongruent, wenn $|B - A| = |B' - A'|$ ist.
- (e) Zwei Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'C'$ heißen kongruent, wenn gilt:

$$\left\langle \frac{B - A}{|B - A|}, \frac{C - A}{|C - A|} \right\rangle = \left\langle \frac{B' - A'}{|B' - A'|}, \frac{C' - A'}{|C' - A'|} \right\rangle.$$

Teil (e) der obigen Definition beruht auf dem Kosinussatz der kartesischen Geometrie, der $\langle v, w \rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos \alpha$ besagt, wenn der Winkel zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren v und w das Mass $\alpha \in [0, \pi]$ hat. Da \cos auf dem Intervall $[0, \pi]$ eine injektive Funktion induziert, ist α durch $\cos \alpha$ eindeutig bestimmt. Die Gleichung in (e) besagt daher gerade, dass die beiden Winkel das gleiche Mass haben, ohne dass dieses Mass eingeführt werden muss.



Satz 7.3 Die kartesische Ebene erfüllt alle Axiome einer euklidischen Ebene.

Beweis Übungsaufgabe.

Addition und Multiplikation von Strecken:

Sei nun umgekehrt $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ irgendeine Ebene, welche alle Axiome der Inzidenz, Lage und Kongruenz sowie das Parallelenaxiom erfüllt. Die Stetigkeitsaxiome fordern wir einstweilen noch nicht. Davon ausgehend konstruieren wir einen angeordneten Körper wie folgt.

Sei P die Menge aller Äquivalenzklassen von Strecken unter Kongruenz. Elemente von P schreiben wir in der Form $a = [AB]$, wobei AB irgendein Repräsentant der Äquivalenzklasse a ist. Wir schreiben $[AB] < [CD]$ und $[CD] > [AB]$, wenn $AB < CD$ ist im Sinne von Definition 4.2. Nach Proposition 4.3 ist das eine wohldefinierte Totalordnung auf P , das heisst, aus $a < b < c$ folgt stets $a < c$, und für je zwei $a, b \in P$ gilt genau eine der drei Aussagen $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

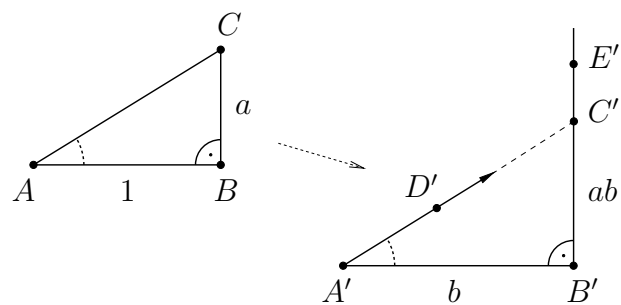
Als nächstes definieren wir die *Summe* von $[AB]$ und $[CD]$. Dafür sei E der nach (K1) eindeutig bestimmte Punkt auf dem zu \overline{BA} entgegengesetzten Strahl, so dass BE kongruent zu CD ist. Die Summe ist dann definiert als $[AB] + [CD] := [AE]$. Durch direkte Anwendung der Kongruenzaxiome für Strecken zeigt man:

Proposition 7.4 Für alle $a, b, c \in P$ gilt:

- (a) $a + b$ ist wohldefiniert, d.h., hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.
- (b) $a + b = b + a$.
- (c) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- (d) Entweder $a = b$, oder $\exists d \in P: a + d = b$, oder $\exists d \in P: b + d = a$.

Für die Konstruktion des *Produkts* müssen wir eine „Einheitslänge“ wählen, das heisst, ein Element $1 \in P$, so dass Multiplikation mit 1 die Identität auf P wird. Eine solche Wahl ist möglich, weil P wegen Axiom (I3) nicht leer ist.

Dann definieren wir das Produkt von a und $b \in P$ wie folgt. Sei ABC ein Dreieck mit $[AB] = 1$ und $[BC] = a$ und einem rechten Winkel $\sphericalangle ABC$. Wähle eine Strecke $A'B'$ mit $[A'B'] = b$, einen Winkel $\sphericalangle B'A'D' \simeq \sphericalangle BAC$, und einen rechten Winkel $\sphericalangle A'B'E'$ auf derselben Seite von $\overline{A'B'}$ wie D' . Nach Proposition 4.10 ist $\sphericalangle BAC$ kleiner als ein rechter Winkel, also gilt dasselbe auch für $\sphericalangle B'A'D'$. Nach Proposition 5.9 haben die Strahlen $\overrightarrow{A'D'}$ und $\overrightarrow{B'E'}$ daher einen Punkt C' gemeinsam; also ist $A'B'C'$ ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ und einem rechten Winkel $\sphericalangle A'B'C'$. Wir definieren dann $ab := [B'C']$.

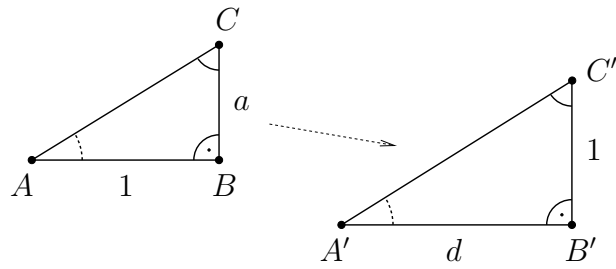


Proposition 7.5 Für alle $a, b, c \in P$ gilt:

- (a) ab ist wohldefiniert.
- (b) $a \cdot 1 = a$.
- (c) $ad = 1$ für ein eindeutiges $d \in P$.
- (d) $ab = ba$.
- (e) $a(bc) = (ab)c$.
- (f) $a(b + c) = ab + ac$.
- (g) $b > c \rightarrow ab > ac$

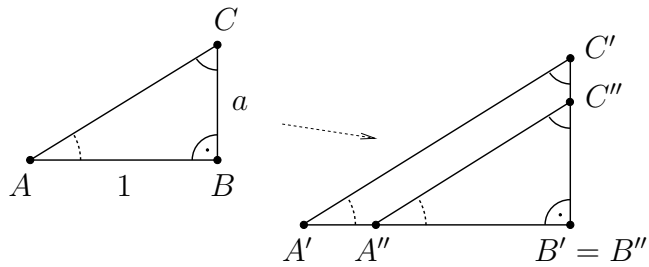
Beweis. (Skizze) Durch wiederholte Anwendung der Kongruenzaxiome zeigt man, dass die Äquivalenzklasse $[B'C']$ in der obigen Konstruktion von den getroffenen Wahlen unabhängig ist, woraus (a) folgt. Die Aussage (b) ergibt sich sofort, wenn man $A'B'C' = ABC$ wählt.

Für (c) bemerken wir, dass $ad = 1$ gilt genau dann, wenn ein Dreieck $A'B'C'$ existiert mit $[A'B'] = d$ und $[B'C'] = 1$ sowie $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ und einem rechten Winkel $\sphericalangle A'B'C'$. Zweimalige Anwendung von Proposition 5.8 zeigt, dass wir die zweitletzte dieser Bedingungen äquivalent ersetzen können durch $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle B'C'A'$. Ein Dreieck $A'B'C'$ mit $[B'C'] = 1$ sowie $\sphericalangle BCA \simeq \sphericalangle B'C'A'$ und einem rechten Winkel $\sphericalangle A'B'C'$ ist aber bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, weil für gegebenenes $B'C'$ der dritte Punkt A' der eindeutige Schnittpunkt der durch die Winkel bestimmten Strahlen $\overrightarrow{B'A'}$ und $\overrightarrow{C'A'}$ sein muss. Ausserdem existiert ein solches Dreieck $A'B'C'$ aus den gleichen Gründen wie in der obigen Konstruktion. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit von $d = [A'B']$ mit $ad = 1$, wie gewünscht.



Die Beweise für (d-f) sind wesentlich aufwändiger; wir lassen sie daher aus Zeitgründen weg. Stattdessen beweisen wir noch die Eigenschaft (g), die man auch direkt aus (f) herleiten könnte. Sei dafür $A'B'C'$ das Dreieck in der obigen Konstruktion von ab .

Das Dreieck $A''B''C''$ in der analogen Konstruktion für ac legen wir so, dass $B' = B''$ und $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B''A''}$ sowie $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B''C''}$ sind. Wegen $[A'B'] = b > c = [A''B'']$ liegt dann A'' im Inneren der Strecke $A'B'$. Wegen $\sphericalangle B'A'C' \simeq \sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B''A''C''$ und Proposition 5.5 sind dann die Geraden $A'C'$ und $A''C''$



parallel. Wegen $A' \neq A''$ haben sie also keinen Punkt gemeinsam; insbesondere liegen daher A'' und C'' auf derselben Seite von $A'C'$. Andererseits liegen auch A'' und $B'' = B'$ auf derselben Seite von $A'C'$. Somit liegen B' und C'' auf derselben Seite von $A'C'$, und daher liegt C' nicht zwischen B' und C'' . Somit muss C'' zwischen B' und C' liegen, und daraus folgt $ab = [B'C'] > [B''C''] = ac$, was zu zeigen war. \square

Lemma 7.6 Sei P eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen $+$ und \cdot und einem ausgezeichneten Element 1 , so dass die Eigenschaften 7.4 (b-d) und 7.5 (b-f) gelten. Dann existiert ein bis auf eindeutige Isomorphie eindeutiger angeordneter Körper K , dessen Menge der positiven Elemente mit den von K induzierten Operationen $+$ und \cdot gleich P ist.

Beweis. Wähle ein neues Symbol 0 und für jedes Element $a \in P$ ein neues Symbol $-a$ und setze $K := P \cup \{0\} \cup \{-a \mid a \in P\}$. Erweitere $+$ auf offensichtliche Weise zu einer Abbildung $+: K \times K \rightarrow K$, das heisst, durch $x + 0 := 0 + x := x$ für alle $x \in K$ und $(-a) + (-b) := -(a + b)$ für alle $a, b \in P$, sowie $(-a) + b := b + (-a) := d$ und $a + (-b) := (-b) + a := -d$ für alle $a, b, d \in P$ mit $a + d = b$. Letzteres ist wohldefiniert,

sofern d durch a und b eindeutig bestimmt ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei $a + d = b = a + d'$ für verschiedene $d, d' \in P$. Nach etwaigem Vertauschen von d und d' folgt aus Proposition 7.4 (d) dann $d' = d + e$ für ein $e \in P$. Die Rechnung $b = a + d' = a + (d + e) = (a + d) + e = b + e$ zeigt sodann, dass gleichzeitig die zwei Fälle $b = b$ und $b = b + e$ in 7.4 (d) gelten, was der Proposition widerspricht. Also ist $d = d'$, wie behauptet.

Analog erweitere \cdot zu einer Abbildung $\cdot: K \times K \rightarrow K$ durch $x \cdot 0 := 0 \cdot x := 0$ für alle $x \in K$ und $a \cdot (-b) := (-a) \cdot b := -(ab)$ sowie $(-a) \cdot (-b) := ab$ für alle $a, b \in P$. Durch direkte Rechnung und diverse Fallunterscheidungen verifiziert man dann jedes der Axiome für angeordnete Körper, was wir hier der Kürze wegen weglassen.

Die Eindeutigkeit von K folgt daraus, dass jedes Element von K entweder in P liegen oder gleich 0 oder gleich $-a$ für ein eindeutiges $a \in P$ sein muss, und dass die Rechenoperationen in K sich auf die beschriebene Weise auf die Operationen in P zurückführen lassen. \square

Durch Kombination der obigen Resultate erhalten wir somit einen angeordneten Körper K . Seine Konstruktion hängt zwar von der Wahl der Einheit $1 \in P$ ab, jedoch bedeutet eine andere Wahl lediglich, dass die Multiplikation um einen positiven Faktor gestreckt wird, was einen auf eindeutige Weise zu K isomorphen Körper liefert.

Die Zahlengerade:

Sei nun \overrightarrow{OE} ein Strahl auf einer Geraden g . Betrachte die Abbildung $g \rightarrow K$ mit

$$A \mapsto \begin{cases} [OA] & \text{falls } A \neq O \text{ auf der gleichen Seite von } O \text{ wie } E \text{ liegt,} \\ 0 & \text{falls } A = O \text{ ist, und} \\ -[OA] & \text{falls } A \neq O \text{ auf der zu } E \text{ entgegengesetzten Seite von } O \text{ liegt,} \end{cases}$$

wobei $[OA]$ die Äquivalenzklasse der Strecke OA unter Kongruenz bezeichnet. Aus dem Axiom (K1) und der Konstruktion von K folgt, dass diese Abbildung bijektiv ist. Wir können damit die Punkte auf g mit den „Zahlen“ in K identifizieren. Diese Identifizierung hängt von der Wahl von $1 \in P$ ab, welche wir geometrisch sichtbar machen können, indem wir E auf dem Strahl \overrightarrow{OE} so wählen, dass $[OE] = 1$ ist.

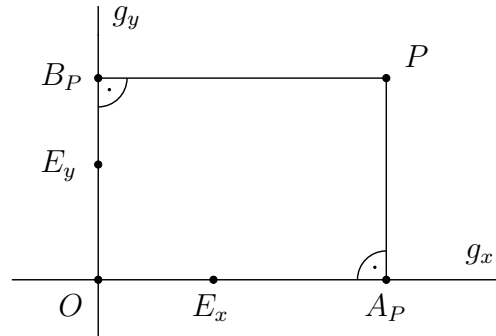
Vermittels dieser Identifizierung übertragen sich die beiden Stetigkeitsaxiome in die besprochenen Axiome für angeordnete Körper. Man zeigt leicht, dass (S1) gilt genau dann, wenn K archimedisch ist, und dass (S2) zu dem Dedekind-Axiom für K äquivalent ist. Zusammen mit Satz 6.10 folgt somit:

Satz 7.7 *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene, die alle Hilbert-Axiome erfüllt. Dann ist der oben konstruierte angeordnete Körper K auf eindeutige Weise isomorph zu \mathbb{R} .*

Kartesische Koordinaten:

Ein *kartesisches Koordinatensystem* besteht aus einem Punkt O , genannt *Ursprung*, und zwei Strahlen der Form $\overrightarrow{OE_x}$ und $\overrightarrow{OE_y}$, die zusammen einen rechten Winkel bilden. Die Gerade $g_x := \overline{OE_x}$ nennen wir die *x-Achse* und $g_y := \overline{OE_y}$ die *y-Achse* des Koordinatensystems. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $[OE_x] = [OE_y] = 1$ ist, also dass E_x und E_y „Einheitsvektoren“ auf ihren jeweiligen Achsen darstellen. Via der obigen Bijektionen $g_x \xrightarrow{\sim} K = \mathbb{R}$ und $g_y \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ entsprechen dann E_x und E_y der Zahl $1 \in \mathbb{R}$.

Sei ein solches Koordinatensystem gegeben. Für jeden Punkt P existiert dann nach Proposition 4.13 ein eindeutiger Punkt $A_P \in g_x$, so dass entweder $P = A_P$ ist oder die Gerade $\overline{PA_P}$ die Gerade g_x in dem Punkt A_P senkrecht schneidet. Via der Bijektion $g_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ entspricht A_P einem Element $x_P \in \mathbb{R}$, der *x-Koordinate von P*. Entsprechend existiert ein eindeutiger Punkt $B_P \in g_y$, so dass entweder $P = B_P$ ist oder die Gerade $\overline{PB_P}$ die Gerade g_y in dem Punkt B_P senkrecht schneidet, und via der Bijektion $g_y \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ entspricht dieser der *y-Koordinate $y_P \in \mathbb{R}$ von P*.



Satz 7.8 Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene, die alle Hilbert-Axiome erfüllt. Dann ist die so konstruierte Abbildung

$$\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad P \mapsto (x_P, y_P)$$

ein Isomorphismus von Geometrien im Sinne von Definition 7.1.

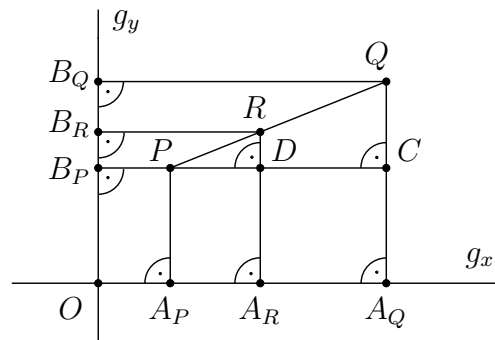
Beweis. (Skizze) Betrachte Punkte $A \in g_x$ und $B \in g_y$, und sei ℓ_A die Gerade, die g_x orthogonal in A schneidet, und ℓ_B die Gerade, die g_y orthogonal in B schneidet. Nach Proposition 5.2 ist dann ℓ_A parallel zu g_y und somit nicht parallel zu ℓ_B . Also haben ℓ_A und ℓ_B genau einen Punkt P gemeinsam. Die obige Konstruktion für P liefert dann gerade die Punkte $A_P = A$ und $B_P = B$, und ausserdem ist P der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft. Also ist die Abbildung φ bijektiv und die Bedingung 7.1 (a) ist erfüllt.

Sowohl in \mathcal{E} als auch in \mathbb{R}^2 besteht eine Gerade \overline{AB} aus den Punkten A und B sowie allen Punkten C mit $C * A * B$ oder $A * C * B$ oder $A * B * C$. Die Bedingung 7.1 (b) folgt daher aus der Bedingung 7.1 (c).

Für letztere betrachte zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathcal{E}$. Der Einfachheit halber besprechen wir nur den Fall, dass $x_Q > x_P > 0$ und $y_Q > y_P > 0$ ist und überlassen alle übrigen Fälle, eingeschlossen derer mit $x_Q = x_P$ oder $y_Q = y_P$, den geneigten Lesern (wie man so schön sagt). Sei R ein Punkt mit $P * R * Q$. Dann sind die Geraden $\overline{PA_P}$ und $\overline{QA_Q}$ und $\overline{RA_R}$ alle parallel und verschieden (wieso genau?). Somit liegen

P und A_P auf derselben Seite von $\overline{RA_R}$, und ebenso liegen Q und A_Q auf derselben Seite von $\overline{RA_R}$. Aber wegen $P * R * Q$ liegen P und Q auf verschiedenen Seiten von $\overline{RA_R}$, somit liegen auch A_P und A_Q auf verschiedenen Seiten von $\overline{RA_R}$, und daher gilt $A_P * A_R * A_Q$. Dies bedeutet aber $x_Q > x_R > x_P$, oder äquivalent:

$$t := \frac{x_R - x_P}{x_Q - x_P} \in]0, 1[.$$

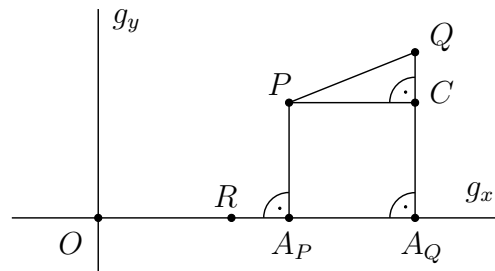


Sei C der Schnittpunkt von $\overline{PB_P}$ mit $\overline{QA_Q}$, und sei D der Schnittpunkt von $\overline{PB_P}$ mit $\overline{RA_R}$. Mittels einiger Kongruenzen zeigt man $[PC] = x_Q - x_P$ und $[CQ] = y_Q - y_P$ sowie $[PD] = x_R - x_P$ und $[DR] = y_R - y_P$. Ausserdem sind $\sphericalangle PCQ$ und $\sphericalangle PDR$ rechte Winkel. Unter Benutzung der Definition des Produkts von Strecken folgert man daraus $(y_Q - y_P)/(x_Q - x_P) = (y_R - y_P)/(x_R - x_P)$ in \mathbb{R} . Daraus folgt nun

$$(x_R, y_R) = t \cdot (x_Q, y_Q) + (1 - t) \cdot (x_P, y_P)$$

und somit $\varphi(P) * \varphi(R) * \varphi(Q)$. Dies zeigt die eine Richtung in 7.1 (c). Für die andere Richtung rollt man dieselben Argumente rückwärts auf.

Die Bedingung 7.1 (d) reduziert man zunächst mittels (K1) in \mathcal{E} und in \mathbb{R}^2 auf den Spezialfall: Für jede Strecke PQ in \mathcal{E} und jeden Punkt $R \in \overrightarrow{OE_x}$ gilt $PQ \cong OR$ genau dann, wenn $\varphi(P)\varphi(Q) \cong \varphi(O)\varphi(R)$ ist. Wie oben besprechen wir nur den Fall $x_Q > x_P > 0$ und $y_Q > y_P > 0$ und überlassen alle übrigen Fälle den gewissenhaften Lesern. Mit demselben Punkt C wie oben haben wir wieder $[PC] = x_Q - x_P$ und $[CQ] = y_Q - y_P$ sowie einen rechten Winkel $\sphericalangle PCQ$. Wegen $y_R = 0$ und $\varphi(O) = (0, 0)$ sowie der Definition von \cong in \mathbb{R}^2 gilt andererseits $\varphi(P)\varphi(Q) \cong \varphi(O)\varphi(R)$ genau dann, wenn $(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 = x_R^2$ ist. Die gewünschte Aussage ist somit äquivalent zu $[PC]^2 + [CQ]^2 = [PQ]^2$, also dem Satz von Pythagoras in \mathcal{E} für das rechtwinklige Dreieck PCQ . Dessen Beweis erfordert einigen Aufwand, den wir hier unterschlagen.



In der Bedingung 7.1 (e) schliesslich können wir oBdA annehmen, dass $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ ist. Aus $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ und (K6) folgt dann $AC \cong A'C'$. Mit den Mitteln von Kapitel 4 zeigt man auch die Umkehrung, also dass zwei Dreiecke, deren entsprechende Seiten kongruent sind, schon insgesamt kongruent sind. Damit reduziert sich 7.1 (e) auf 7.1 (d), und wir sind fertig. \square

8 Bewegungen

Generell nennt man einen Isomorphismus von einem mathematischen Objekt auf sich selbst einen *Automorphismus*. Die Definition von Isomorphismen (vgl. Kapitel 7) impliziert sofort, dass jede Komposition von Isomorphismen sowie die inverse Abbildung jedes Isomorphismus wieder ein Isomorphismus ist. Ausserdem ist die identische Abbildung jedes Objekts auf sich selbst ein Automorphismus. Daher bildet die Menge aller Automorphismen des Objekts eine Gruppe unter Komposition mit der identischen Abbildung als Einselement. Diese Gruppe heisst die *Automorphismengruppe* des Objekts.

Oft liefert die Automorphismengruppe wichtige Informationen über das Objekt. Ihre Untersuchung und/oder Bestimmung ist daher ein Grundproblem in allen Bereichen der Mathematik. Automorphismengruppen sind häufig auch in sich selbst interessant, und die Realisierung einer Gruppe als Automorphismengruppe eines mathematischen Objekts kann die Grundlage dafür sein, die Gruppe überhaupt zu verstehen.

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine Geometrie, welche die Hilbert-Axiome der Inzidenz, Lage, und Kongruenz erfüllt. Das Parallelenaxiom und die Stetigkeitsaxiome werden wir erst am Ende dieses Kapitels wieder benutzen.

Definition 8.1 *Eine (rigide) Bewegung von \mathcal{E} ist eine Abbildung $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit den Eigenschaften:*

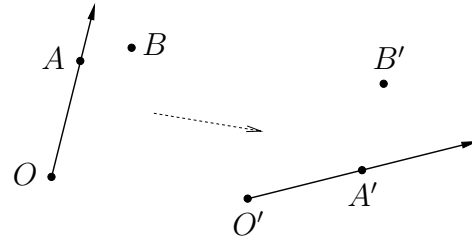
- (a) *sie ist bijektiv,*
- (b) *eine Teilmenge $g \subset \mathcal{E}$ ist eine Gerade genau dann, wenn $\varphi(g)$ eine Gerade ist,*
- (c) *$A * B * C$ gilt genau dann, wenn $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$ ist,*
- (d) *für jede Strecke AB gilt $AB \cong \varphi(A)\varphi(B)$, und*
- (e) *für jeden Winkel $\sphericalangle ABC$ gilt $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$.*

Die Namensgebung dieses Begriffs hat den folgenden Hintergrund: Im normalen Leben versteht man unter einer Bewegung eines Objekts eine kontinuierliche Änderung der Position im Raum und betrachtet diese als rigide, wenn das Objekt seine Form beibehält, d.h. wenn alle Lagebeziehungen wie Abstände und Winkel zwischen Punkten des Objekts während der Bewegung konstant bleiben. Der Unterschied zwischen der Anfangs- und Endposition des Objekts wird dann durch eine Bewegung im mathematischen Sinn beschrieben. Bei letzterer wird dann nicht mehr vorausgesetzt, dass man sie durch kontinuierliche Veränderung der Ausgangsposition erreichen kann. Deshalb sind auch Spiegelungen Bewegungen im mathematischen Sinn, obwohl man sie nicht durch eine kontinuierliche Positionsveränderungen erreichen kann.

Durch Vergleich mit Definition 7.1 zeigt man schnell, dass jede Bewegung von \mathcal{E} insbesondere ein Automorphismus von \mathcal{E} ist. Die Umkehrung gilt nicht; zum Beispiel ist für jede reelle Zahl $t > 0$ die Streckung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A \mapsto tA$, ein Automorphismus der kartesischen Ebene, aber eine Bewegung nur für $t = 1$. Als Automorphismus bildet jede Bewegung Strecken, Strahlen, Dreiecke, rechte Winkel usw. auf ebensolche ab.

Wie bei Automorphismen sieht man sofort, dass die identische Abbildung, jede Komposition von Bewegungen sowie die inverse Abbildung jeder Bewegung wieder eine Bewegung ist. Die Menge aller Bewegungen von \mathcal{E} ist daher eine Untergruppe der Automorphismengruppe von \mathcal{E} , genannt die *Bewegungsgruppe* von \mathcal{E} . Ein Hauptziel des vorliegenden Kapitels ist, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 8.2 Für je zwei Strahlen \overrightarrow{OA} und $\overrightarrow{O'A'}$ und je zwei Punkte $B \notin \overrightarrow{OA}$ und $B' \notin \overrightarrow{O'A'}$ existiert genau eine Bewegung $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'}$, so dass $\varphi(B)$ und B' auf derselben Seite von $\overrightarrow{O'A'}$ liegen.



Dieser Satz beinhaltet insbesondere, dass für je zwei Punkte O und O' eine Bewegung φ mit $\varphi(O) = O'$ existiert, das heisst: Die Bewegungsgruppe operiert *transitiv* auf der Menge der Punkte. Das bedeutet, dass in jedem Punkt der Geometrie die gleichen „Gesetze“ gelten wie in jedem anderen Punkt. Dass die Bewegungsgruppe auch transitiv auf der Menge aller Strahlen operiert, bedeutet, dass auch für jede von einem Punkt ausgehende Richtung dieselben Gesetze gelten. Schliesslich gelten auch die gleichen Gesetze auf den beiden Seiten eines Strahls. Anschaulich gesprochen sieht die Ebene also auf eine präzise Weise überall gleich aus.

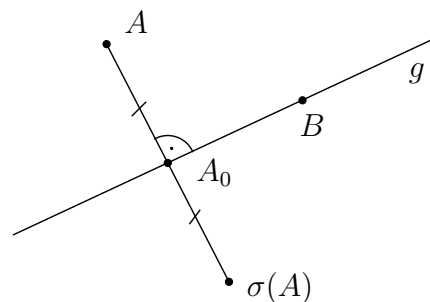
Dass ein Raum „überall gleich aussieht“ in dem Sinn, dass überall dieselben Gesetze gelten, ist ein wichtiges Grundprinzip der Mathematik wie der Physik. Dass überall dieselben Gesetze gelten, ist übrigens nicht nur eine Folge davon, dass die Automorphismengruppe transitiv auf den Punkten operiert, sondern sogar in einem gewissen Sinn äquivalent dazu. Denn wenn sie es nicht täte, dann gäbe es eben Punkte A und A' , welche in Bezug auf den gesamten Raum nicht genau dieselben Eigenschaften besitzen. Auch die Grundgesetze der Physik beruhen letztlich darauf, dass der Raum oder die Raumzeit oder andere davon abgeleitete höherdimensionale Räume unter gewissen Symmetrie-Operationen invariant sind.

Spiegelungen:

Definition 8.3 Eine Bewegung, welche alle Punkte einer Geraden g auf sich abbildet und jeden Punkt in $\mathcal{E} \setminus g$ auf einen Punkt auf der dazu entgegengesetzten Seite von g abbildet, heisst Spiegelung an g .

Proposition 8.4 Sei σ eine Spiegelung an einer Geraden g .

- (a) Für jeden Punkt $A \notin g$ sei A_0 der Punkt auf g zwischen A und $\sigma(A)$; dann gilt $A_0A \cong A_0\sigma(A)$ und $A_0A \perp g$.
- (b) σ ist durch g bereits eindeutig bestimmt.
- (c) $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}$ und $\sigma^{-1} = \sigma$.



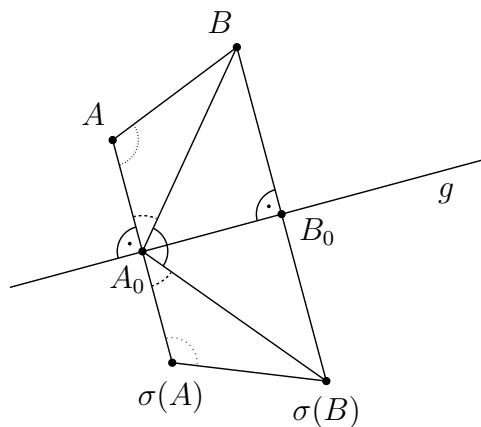
Beweis. In (a) wähle ausserdem einen Punkt $B \in g \setminus \{A_0\}$; dann gilt nach Voraussetzung $\sigma(A_0) = A_0$ und $\sigma(B) = B$. Da σ eine Bewegung ist, folgt daraus $A_0A \cong \sigma(A_0)\sigma(A) = A_0\sigma(A)$ und $\sphericalangle AA_0B \simeq \sphericalangle \sigma(A)A_0\sigma(B) = \sphericalangle \sigma(A)A_0B$. Da $\sphericalangle \sigma(A)A_0B$ ein Nebenwinkel von $\sphericalangle AA_0B$ ist, sind beides rechte Winkel. Damit ist (a) gezeigt.

In (a) beachte weiter, dass $A_0 \in g$ nach Proposition 4.13 durch die Bedingung, dass $\sphericalangle AA_0B$ ein rechter Winkel ist, bereits eindeutig bestimmt ist. Durch die Bedingungen $A * A_0 * \sigma(A)$ und $A_0A \cong A_0\sigma(A)$ ist dann auch $\sigma(A)$ eindeutig bestimmt. Also gilt (b). Die Charakterisierung in (a) impliziert dann auch $\sigma(\sigma(A)) = A$ und somit (c). \square

Proposition 8.5 Für jede Gerade g existiert genau eine Spiegelung an g .

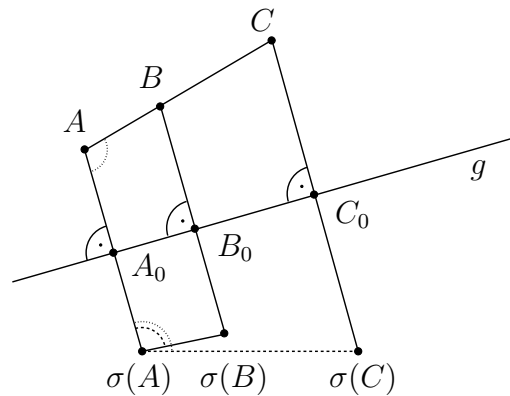
Beweis. (Skizze) Die Eindeutigkeit und die Konstruktionsvorschrift sind bereits in Proposition 8.4 und deren Beweis enthalten. Es bleibt zu zeigen, dass die dadurch definierte Abbildung $\sigma: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ eine Bewegung, d.h., ein Isomorphismus ist. Wie im Beweis von Satz 7.8 ist dafür einiges zu tun.

Wegen $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}$ ist σ bijektiv, also gilt die Bedingung 8.1 (a). Als nächstes behandeln wir die Bedingung 8.1 (d): Für jede Strecke AB gilt $AB \cong \varphi(A)\varphi(B)$. Der Einfachheit halber besprechen wir nur den Fall, dass A und B auf derselben Seite von g liegen und \overline{AB} nicht orthogonal zu g ist; die übrigen Fälle gehen analog. Seien A_0, B_0 die Punkte auf g mit $\overline{AA_0} \perp g$ und $\overline{BB_0} \perp g$. Die Voraussetzung impliziert dann $A_0 \neq B_0$. Nach Proposition 5.2 sind die Geraden $\overline{AA_0}, \overline{BB_0}$ parallel und somit disjunkt. Insbesondere liegen daher je zwei Punkte einer dieser Geraden auf derselben Seite der anderen. Die Dreiecke A_0B_0B und $A_0B_0\sigma(B)$ haben dann die Seite A_0B_0 gemeinsam, kongruente rechte Winkel $\sphericalangle A_0B_0B \simeq \sphericalangle A_0B_0\sigma(B)$, und kongruente Seiten $B_0B \cong B_0\sigma(B)$, sind also nach (K6) kongruent. Somit gilt $A_0B \cong A_0\sigma(B)$ und $\sphericalangle BA_0B_0 \simeq \sphericalangle \sigma(B)A_0B_0$. Da A und B auf derselben Seite von $\overline{A_0B_0} = g$, und B und B_0 auf derselben Seite von $\overline{AA_0}$ liegen, ist B im Inneren des rechten Winkels $\sphericalangle AA_0B_0$ enthalten. Genauso zeigt man, dass $\sigma(B)$ im Inneren des rechten Winkels $\sphericalangle \sigma(A)A_0B_0$ liegt. Aus Proposition 4.7 folgt daher $\sphericalangle AA_0B \simeq \sphericalangle \sigma(A)A_0\sigma(B)$. Wegen $A_0A \cong A_0\sigma(A)$ folgt daraus mit (K6), dass die Dreiecke AA_0B und $\sigma(A)A_0\sigma(B)$ kongruent sind. Insbesondere ist daher $AB \cong \sigma(A)\sigma(B)$, was zu zeigen war. Für später halten wir fest, dass ausserdem $\sphericalangle A_0AB \simeq \sphericalangle A_0\sigma(A)\sigma(B)$ folgt.

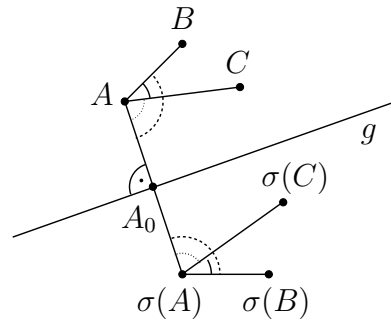


Für die Bedingung 8.1 (c) seien drei Punkte gegeben mit $A * B * C$. Wir besprechen wieder nur den Fall, dass diese auf einer Seite von g liegen und die Gerade durch sie nicht orthogonal zu g ist. Wir müssen zeigen, dass dann $\sigma(B)$ zwischen $\sigma(A)$ und $\sigma(C)$ liegt, was wir in der untenstehenden Abbildung vorsichtshalber noch nicht vorwegnehmen. Mit A_0 wie oben gilt dann $\sphericalangle A_0AB \simeq \sphericalangle A_0\sigma(A)\sigma(B)$, und dieselben Überlegungen

mit C anstelle von B zeigen $\sphericalangle A_0AC \simeq \sphericalangle A_0\sigma(A)\sigma(C)$. Nach Voraussetzung ist aber $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ und somit $\sphericalangle A_0AB = \sphericalangle A_0AC$, und die Punkte $\sigma(B)$, B , C , $\sigma(C)$ liegen alle auf derselben Seite von $\overline{AA_0} = \sigma(A)A_0$. Die Eindeutigkeit in (K4) impliziert daher $\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)} = \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}$. Wegen $A * B * C$ und (d) ist schliesslich $\sigma(A)\sigma(B) \cong AB < AC \cong \sigma(A)\sigma(C)$ und somit $\sigma(A)\sigma(B) < \sigma(A)\sigma(C)$. Daraus folgt $\sigma(A) * \sigma(B) * \sigma(C)$. Dies beweist die Implikation „ \Rightarrow “ in 8.1 (c). Die Implikation „ \Leftarrow “ folgt direkt daraus wegen $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}$.



Von den übrigen Bedingungen folgt 8.1 (b) aus 8.1 (c), ähnlich wie im Beweis von Satz 7.8. Für 8.1 (e) ist für jeden Winkel zu zeigen $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle \sigma(B)\sigma(A)\sigma(C)$. Nehmen wir wieder an, dass A, B, C auf der gleichen Seite von g liegen und dass weder \overline{AB} noch \overline{AC} orthogonal zu g ist. Mit A_0 wie oben wissen wir dann bereits $\sphericalangle A_0AB \simeq \sphericalangle A_0\sigma(A)\sigma(B)$ und $\sphericalangle A_0AC \simeq \sphericalangle A_0\sigma(A)\sigma(C)$. Daraus folgt $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle \sigma(B)\sigma(A)\sigma(C)$ mittels Proposition 4.7, nachdem wir geklärt haben, welche der genannten Winkel im Inneren welcher anderen liegen. Die dafür nötigen Details möge sich der/die aufmerksame Leser/in selbst überlegen. □



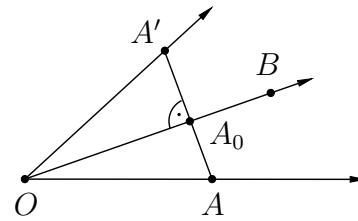
Proposition 8.6 *Für je zwei Punkte $A \neq A'$ existiert genau eine Spiegelung σ mit $\sigma(A) = A'$.*

Beweis. Sei σ die Spiegelung an einer Geraden g , und sei A_0 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA'}$. Nach Proposition 8.4 (a) gilt $\sigma(A) = A'$ genau dann, wenn A_0 auf g liegt und $\overline{A_0A}$ dort einen rechten Winkel mit g hat. Da wegen Proposition 4.12 und 4.14 eine eindeutige Gerade g mit diesen Eigenschaften existiert, folgt die Behauptung also aus Proposition 8.5. □

Proposition 8.7 *Für jeden Punkt O und je zwei Strahlen der Form \overrightarrow{OA} und $\overrightarrow{OA'}$ existiert eine Spiegelung σ an einer Geraden durch O mit $\sigma(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$.*

Beweis. In dem Fall $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ tut es die Spiegelung an der Geraden \overline{OA} . In dem Fall $A * O * A'$ sei g die Gerade durch O , die dort orthogonal zu \overline{OA} ist, und sei σ die Spiegelung an g gemäss Proposition 8.5. Nach Proposition 8.4 hat dann σ die gesuchte Eigenschaft. Andernfalls sind A, O, A' nicht kollinear. Sei dann \overline{OB}

die Winkelhalbierende von $\sphericalangle AOA'$, und sei σ die Spiegelung an der Geraden \overrightarrow{OB} gemäss Proposition 8.5. Nach etwaigem Ersetzen von A' durch einen anderen Punkt des Strahls $\overrightarrow{OA'}$ können wir annehmen, dass $OA \cong OA'$ ist. Nach Proposition 3.25 existiert ein Punkt $A_0 \in \overrightarrow{OB} \cap AA'$. Dann erfüllen die Dreiecke A_0OA und A_0OA' die Voraussetzungen des Axioms (K6) und sind somit kongruent. Insbesondere gilt dann $A_0A \cong A_0A'$, und $\sphericalangle AA_0O \simeq \sphericalangle A'A_0O$ sind zueinander kongruente Nebenwinkel, also rechte Winkel. Die Charakterisierung in Proposition 8.4 (a) zeigt dann $\sigma(A) = A'$. Ohnehin gilt $\sigma(O) = O$ und daher $\sigma(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$, wie gewünscht. \square



Beweis von Satz 8.2. Nach Proposition 8.6 existiert eine Spiegelung σ mit $\sigma(O) = O'$, oder dasselbe gilt für $\sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}$. Dann ist $\sigma(A) \neq O'$ und $\sigma(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'\sigma(A)}$. Nach Proposition 8.7 existiert eine Spiegelung τ mit $\tau(\overrightarrow{O'\sigma(A)}) = \overrightarrow{O'A'}$. Dann liegt $\tau(\sigma(B))$ nicht auf $\tau(\sigma(\overrightarrow{OA})) = \tau(\overrightarrow{O'\sigma(A)}) = \overrightarrow{O'A'}$. Falls $\tau(\sigma(B))$ und B' auf derselben Seite von $\overrightarrow{O'A'}$ liegen, setze $\rho := \text{id}_{\mathcal{E}}$; andernfalls sei ρ die Spiegelung an $\overrightarrow{O'A'}$ gemäss Proposition 8.5. Dann erfüllt $\rho \circ \tau \circ \sigma$ die gewünschten Bedingungen, und die Existenz ist gezeigt.

Für die Eindeutigkeit seien φ und φ' zwei Bewegungen mit den gesuchten Eigenschaften. Dann ist $\psi := \varphi^{-1} \circ \varphi'$ eine Bewegung mit $\psi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$, so dass $\psi(B)$ und B auf derselben Seite von \overrightarrow{OA} liegen. Es genügt zu zeigen, dass $\psi(C) = C$ ist für jeden Punkt C . Im Fall $C = O$ ist das bereits klar. Für $C \in \overrightarrow{OA} \setminus \{O\}$ ist $\psi(C)$ ein weiterer Punkt in $\overrightarrow{OA} \setminus \{O\}$ mit $OA \cong \psi(O)\psi(C) = O\psi(C)$, also folgt die Gleichung $\psi(C) = C$ dann aus dem Axiom (K1). Das entsprechende Argument mit dem zu \overrightarrow{OA} entgegengesetzten Strahl erledigt den Fall $C \in \overrightarrow{OA} \setminus \overrightarrow{OA}$. Für $C \notin \overrightarrow{OA}$ gibt es zwei Fälle. Liegen C und B auf derselben Seite von \overrightarrow{OA} , so liegen $\psi(C)$ und $\psi(B)$ auf derselben Seite von $\psi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$, also liegen C und $\psi(C)$ auf derselben Seite von \overrightarrow{OA} . Liegen C und B auf entgegengesetzten Seiten von \overrightarrow{OA} , so liegen $\psi(C)$ und $\psi(B)$ auf entgegengesetzten Seiten von $\psi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$; auch in diesem Fall liegen daher C und $\psi(C)$ auf derselben Seite von \overrightarrow{OA} . Ausserdem gilt $\sphericalangle AOC \simeq \sphericalangle \psi(A)\psi(O)\psi(C) = \sphericalangle AO\psi(C)$; in beiden Fällen zeigt somit das Axiom (K4), dass $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O\psi(C)}$ ist. Mit $OC \cong \psi(O)\psi(C) = O\psi(C)$ und (K1) folgt dann wiederum, dass $\psi(C) = C$ ist, und wir sind fertig. \square

Proposition 8.8 *Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.*

Beweis. Sei ψ irgendeine Bewegung. Wähle einen Strahl \overrightarrow{OA} und einen Punkt $B \notin \overrightarrow{OA}$ und setze $O' := \psi(O)$ und $A' := \psi(A)$ und $B' := \psi(B)$. Im obigen Beweis von Satz 8.2 wurde explizit eine Bewegung φ konstruiert, welche eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen ist, so dass $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'}$ ist und $\varphi(B)$ und B' auf derselben Seite

von $\overline{O'A'}$ liegen. Da ψ dieselben Eigenschaften hat, zeigt die Eindeutigkeit in Satz 8.2, dass $\psi = \varphi$ ist. \square

Drehungen:

Definition 8.9 Eine Bewegung φ , die einen Punkt O auf sich abbildet und keine Spiegelung ist, heisst Drehung um O .

Proposition 8.10 (a) Jede Komposition zweier Spiegelungen an Geraden durch O ist eine Drehung um O .

(b) Für je zwei Strahlen der Form \overrightarrow{OA} und $\overrightarrow{OA'}$ existiert genau eine Spiegelung σ an einer Geraden durch O mit $\sigma(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$ und genau eine Drehung φ um O mit $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$.

(c) Jede Komposition einer Drehung um O und einer Spiegelung an einer Geraden durch O ist eine Spiegelung an einer Geraden durch O .

(d) Jede Drehung um O ist eine Komposition zweier Spiegelungen an Geraden durch O .

(e) Das Inverse jeder Drehung um O ist eine Drehung um O .

(f) Jede Komposition zweier Drehungen um O ist eine Drehung um O .

Beweis. Für (a) seien σ und τ Spiegelungen an Geraden g bzw. h durch O . Nehmen wir an, dass $\tau \circ \sigma$ keine Drehung um O ist. Dann ist es die Spiegelung an einer Geraden der Form \overline{OA} . Wäre $\overline{OA} = g$, so wäre $\tau \circ \sigma = \sigma$ und somit $\tau = \text{id}_{\mathcal{E}}$, also keine Spiegelung. Daher gilt $A \notin g$ und somit $A' := \sigma(A) \neq A$. Andererseits haben wir $\tau(\sigma(A)) = A$ und darum $A' = \sigma(A) = \tau^{-1}(A) = \tau(A)$. Aus der Eindeutigkeit in Proposition 8.6 folgt daher $\sigma = \tau$. Dies impliziert aber $\tau \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}$, was keine Spiegelung ist, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist (a) bewiesen.

Für (b) sei σ die Spiegelung aus Proposition 8.7 mit $\sigma(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$, und sei τ die Spiegelung an der Geraden $\overline{OA'}$. Nach (a) ist dann $\varphi := \tau \circ \sigma$ eine Drehung um O mit $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$. Nach Konstruktion sind dann σ und φ zwei verschiedene Bewegungen ψ mit $\psi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$, die eine gegebene Seite von \overline{OA} auf verschiedene Seiten von $\overline{OA'}$ abbilden. Nach der Eindeutigkeit in Satz 8.2 sind dies daher die einzigen Bewegungen ψ mit $\psi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$. Somit ist σ die einzige Spiegelung und φ die einzige Drehung mit der gesuchten Eigenschaft, wie zu zeigen war.

Für (c) sei φ eine Drehung um O und σ die Spiegelung an einer Geraden der Form \overline{OA} . Sei τ die Spiegelung aus Proposition 8.7 mit $\tau(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O\varphi(A)}$. Nach (a) ist dann $\tau \circ \sigma$ eine Drehung um O mit der Eigenschaft $(\tau \circ \sigma)(\overrightarrow{OA}) = \tau(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O\varphi(A)}$. Nach (b) folgt daraus $\tau \circ \sigma = \varphi$, also ist $\varphi \circ \sigma = \varphi \circ \sigma^{-1} = \tau$ eine Spiegelung an einer Geraden g durch O . Daraus folgt weiter, dass $\sigma \circ \varphi = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ die Spiegelung an der Geraden $\sigma(g)$ durch O ist. Damit ist (c) bewiesen.

Für die übrigen Aussagen seien φ und ψ Drehungen um O . Für irgendeine Spiegelung σ an einer Geraden durch O ist dann $\tau := \varphi \circ \sigma$ nach (c) eine Spiegelung an einer Geraden durch O mit $\tau \circ \sigma = \tau \circ \sigma^{-1} = \varphi$, also gilt (d). Wäre φ^{-1} eine Spiegelung, so gälte $\varphi = \varphi^{-1}$ und φ selbst wäre eine Spiegelung, im Widerspruch zur Annahme; somit gilt (e). Wäre schliesslich $\rho := \psi \circ \varphi$ keine Drehung, so wäre es eine Spiegelung an einer Geraden durch O , und nach (e) und (c) wäre dann auch $\varphi = \psi^{-1} \circ \rho$ eine Spiegelung, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist auch (f) bewiesen. \square

Proposition 8.11 *Die Drehungen um O bilden eine abelsche Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen.*

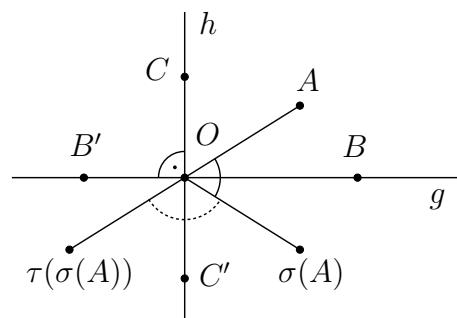
Beweis Übungsaufgabe.

Proposition 8.12 *Sei $\varphi = \tau \circ \sigma$ für Spiegelungen σ, τ an Geraden g, h durch O .*

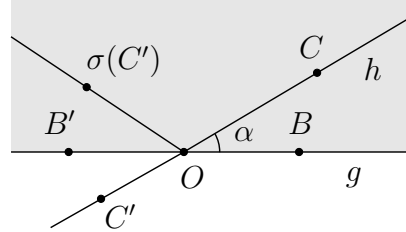
- (a) *Ist $g = h$, so ist $\varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.*
- (b) *Ist $g \perp h$, so gilt $A * O * \varphi(A)$ für alle $A \neq O$.*
- (c) *Andernfalls sei α der kleinere der beiden Winkel zwischen g und h . Für jeden Punkt $A \neq O$ sind dann $A, O, \varphi(A)$ nicht kollinear und es gilt $\sphericalangle A O \varphi(A) \simeq 2\alpha$.*

Beweis. Im Fall (a) ist $\sigma = \tau$ wegen Proposition 8.4 (b) und somit $\varphi = \sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}$ wie gewünscht. Andernfalls sei $A \neq O$, und seien $B, B' \in g$ mit $B * O * B'$ und $C, C' \in h$ mit $C * O * C'$.

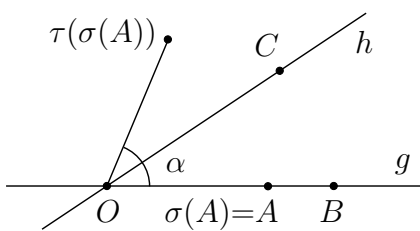
Betrachten wir den Fall (b). Für $A \in g$ gilt $\sigma(A) = A$ und $A * O * \tau(A)$ nach der Charakterisierung von Spiegelungen in Proposition 8.4 (a), und daher $A * O * \varphi(A)$, wie gewünscht. Für $A \in h$ folgt aus Proposition 8.4 (a) ebenso $A * O * \sigma(A)$ und $\sigma(A) \in h$ und somit $\tau(\sigma(A)) = \sigma(A)$, und daher wiederum $A * O * \varphi(A)$, wie gewünscht. Für $A \notin g \cup h$ können wir nach etwaiger Vertauschung $B \leftrightarrow B'$ und/oder $C \leftrightarrow C'$ annehmen, dass A und C auf derselben Seite von g , sowie A und B auf derselben Seite von h liegen. Das heisst: A liegt im Inneren von $\sphericalangle BOC$. Da σ eine Bewegung mit $\sigma(O) = O$ und $\sigma(B) = B$ ist, liegt dann $\sigma(A)$ im Inneren von $\sphericalangle BOC'$ und es gilt $\sphericalangle AOB \simeq \sphericalangle \sigma(A)OB$. Die Winkel $\sphericalangle \sigma(A)OB$ und $\sphericalangle \sigma(A)OC'$ ergänzen sich dann zu dem rechten Winkel $\sphericalangle BOC'$. Da τ eine Bewegung mit $\tau(O) = O$ und $\tau(C') = C$ ist, liegt dann $\varphi(A) = \tau(\sigma(A))$ im Inneren von $\sphericalangle B'OC'$ und es gilt $\sphericalangle \sigma(A)OC' \simeq \sphericalangle \varphi(A)OC'$. Die Summe der Winkel $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BO\sigma(A)$, $\sphericalangle \sigma(A)OC'$, und $\sphericalangle C'O\varphi(A)$ ist dann kongruent zu der Summe von je zwei Kopien von $\sphericalangle BO\sigma(A)$ und $\sphericalangle \sigma(A)OC'$, also zu der Summe von zwei Kopien des rechten Winkels $\sphericalangle BOC'$. Somit liegt $\varphi(A)$ in \overline{OA} auf der zu A entgegengesetzten Seite von O , das heisst, es gilt $A * O * \varphi(A)$, wie gewünscht.



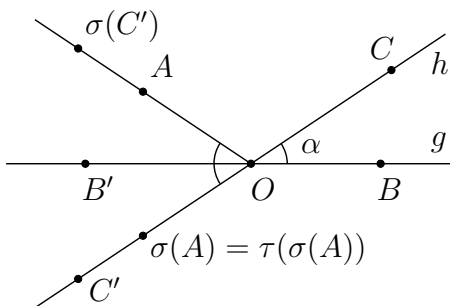
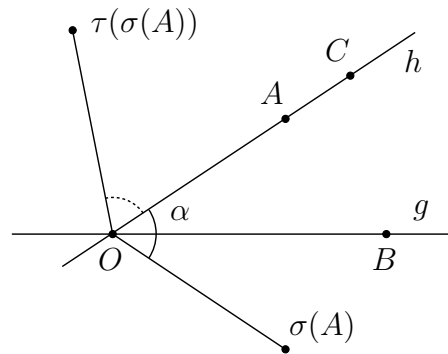
Betrachten wir nun den Fall (c). Nach etwaiger Vertauschung $B \leftrightarrow B'$ können wir annehmen, dass $\alpha = \sphericalangle BOC < \sphericalangle BOC'$ ist. Diese Bedingung bleibt unter der Vertauschung $(B, C) \leftrightarrow (B', C')$ erhalten; daher können wir ausserdem oBdA annehmen, dass entweder $A \in \overrightarrow{OB}$ ist oder A und C auf derselben Seite von g liegen. Diese Seite von g teilt sich dann auf in die Strahlen \overrightarrow{OC} und $\overrightarrow{O\sigma(C')}$ sowie das Innere der Winkel $\sphericalangle BOC$ und $\sphericalangle CO\sigma(C')$ und $\sphericalangle \sigma(C')OB'$. In der nebenstehenden Abbildung ist dieser Bereich grau schattiert.



Im Fall $A \in \overrightarrow{OB}$ gilt $\sigma(A) = A \notin h$, und somit liegt $\varphi(A) = \tau(\sigma(A))$ auf der zu A entgegengesetzten Seite von h mit $\sphericalangle \varphi(A)OC \simeq \sphericalangle AOC = \alpha$; daher ist $\sphericalangle AO\varphi(A)$ kongruent zu 2α , wie gewünscht.

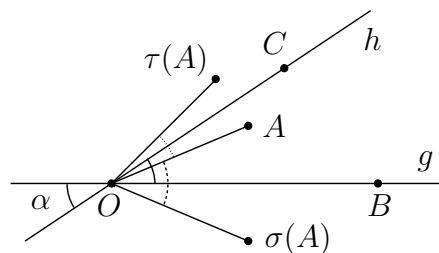


Im Fall $A \in \overrightarrow{OC}$ liegt $\sigma(A)$ auf der zu A entgegengesetzten Seite von g mit $\sphericalangle \sigma(A)OB \simeq \sphericalangle AOB = \alpha$, also mit $\sphericalangle AO\sigma(A) \simeq 2\alpha$. Wegen $A \in h$ gilt daher $\tau(A) = A$ und somit $\sphericalangle AO\varphi(A) = \tau(\sphericalangle AO\sigma(A)) \simeq \sphericalangle AO\sigma(A) \simeq 2\alpha$, wie gewünscht.



Im Fall $A \in \overrightarrow{O\sigma(C')}$ liegt $\sigma(A)$ auf der zu A entgegengesetzten Seite von g mit $\sphericalangle AOB' \simeq \sphericalangle \sigma(A)OB' = \sphericalangle C'OB' \simeq \sphericalangle COB = \alpha$; daher ist $\sphericalangle AO\sigma(A)$ kongruent zu 2α . Ausserdem ist $\sigma(A) \in h$ und somit $\varphi(A) = \sigma(A)$, und die gewünschte Aussage $\sphericalangle AO\sigma(A) \simeq 2\alpha$ folgt ebenso.

Für A im Inneren von $\sphericalangle BOC$ liegt $\sigma(A)$ auf der zu A und C entgegengesetzten Seite von g mit $\sphericalangle BO\sigma(A) \simeq \sphericalangle BOA$. Ebenso liegt $\tau(A)$ auf der zu A und B entgegengesetzten Seite von h mit $\sphericalangle CO\tau(A) \simeq \sphericalangle COA$. Somit setzt sich $\sphericalangle \tau(A)O\sigma(A)$ der Reihe nach zusammen aus den vier Winkeln $\sphericalangle \tau(A)OC \simeq \sphericalangle COA$ und $\sphericalangle AOB \simeq \sphericalangle BO\sigma(A)$, ent-



spricht also $2\times$ der Summe von $\sphericalangle COA$ und $\sphericalangle AOB$, das heisst $2\times$ dem Winkel $\sphericalangle COB = \alpha$. Da τ eine Bewegung ist, folgt somit $\sphericalangle AO\varphi(A) = \tau(\sphericalangle \tau(A)O\sigma(A)) \simeq 2\alpha$, wie gewünscht. Die beiden übrigen Fälle gehen analog. \square

Proposition 8.13 *Für jede Drehung φ um O gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

- (a) $\varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.
- (b) Für jeden Punkt $A \neq O$ gilt $A * O * \varphi(A)$. Dann heisst φ Punktspiegelung an O .
- (c) Für jeden Punkt $A \neq O$ sind $A, O, \varphi(A)$ nicht kollinear, und für jeden weiteren Punkt $B \neq O$ gilt $\sphericalangle AO\varphi(A) \simeq \sphericalangle BO\varphi(B)$.

Beweis. Nach Proposition 8.10 (d) ist jede Drehung um O eine Komposition zweier Spiegelungen an Geraden durch O . Aus Proposition 8.12 folgt also, dass mindestens eine der gewünschten Aussagen gilt. Man sieht aber direkt, dass diese Aussagen einander ausschliessen; somit gilt genau eine davon. \square

Proposition 8.14 *Für jeden Punkt O existiert genau eine Punktspiegelung an O .*

Beweis. Die Existenz folgt aus der Existenz rechter Winkel mit Proposition 8.12 (b), die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit in Proposition 8.10 (b). \square

Klassifikation von Bewegungen:

Für jede Bewegung φ heisst $\mathcal{E}^\varphi := \{A \in \mathcal{E} \mid \varphi(A) = A\}$ die Menge der *Fixpunkte von φ* . Verschiedene Typen von Bewegungen unterscheiden sich insbesondere in der Art ihrer Fixpunktmenge. Aus den obigen Resultaten folgt schnell:

Proposition 8.15 *Für jede Bewegung φ gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

- (a) $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}$ und $\varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.
- (b) \mathcal{E}^φ ist eine Gerade g und φ ist die Spiegelung an g .
- (c) \mathcal{E}^φ besteht aus einem Punkt O und φ ist eine nicht-triviale Drehung um O .
- (d) $\mathcal{E}^\varphi = \emptyset$.

Die Eigenschaften von Bewegungen des letzten Typs, also solcher ohne Fixpunkte, hängen davon ab, ob das Parallelenaxiom gilt oder nicht. Wenn wir dieses voraussetzen, erhalten wir die gleichen Resultate wie im \mathbb{R}^2 ; darum beschränken wir uns für den Rest des Kapitels auf den Fall der kartesischen Ebene. Zuerst beschreiben wir alle Bewegungen als Kombinationen von orthogonalen Transformationen und Translationen.

Für jede natürliche Zahl n bezeichnet $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{R} und dem Matrixprodukt als Gruppenoperation. Sie heisst die *allgemeine lineare Gruppe* (auf englisch General Linear group) vom Grad

n über \mathbb{R} . Jedes Element $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ operiert auf dem Vektorraum der Zeilenvektoren \mathbb{R}^n durch Rechtsmultiplikation $v \mapsto vM^t$, wobei $(\)^t$ die transponierte Matrix bezeichnet. Das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n können wir durch

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \rangle := x_1x'_1 + \dots + x_nx'_n = (x_1, \dots, x_n) \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^t$$

als Matrixprodukt schreiben, also kurz in der Form $\langle v, w \rangle = v \cdot w^t$. Es ist invariant unter M genau dann, wenn $\langle v, w \rangle = \langle vM^t, wM^t \rangle$ ist für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Mit dem Matrixprodukt übersetzt sich diese Gleichung zu

$$vw^t = (vM^t)(wM^t)^t = (vM^t)(Mw^t) = v(M^tM)w^t.$$

Daraus ersieht man schnell, dass das Skalarprodukt unter M invariant ist genau dann, wenn M^tM gleich der Einheitsmatrix Id_n ist. Eine solche Matrix M heisst *orthogonal*, und die Gruppe aller orthogonalen $n \times n$ -Matrizen

$$\text{O}(n) := \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid M^tM = \text{Id}_n\}$$

heisst die *orthogonale Gruppe vom Grad n* über \mathbb{R} . Für jede orthogonale Matrix M und jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt auch

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\langle vM^t, vM^t \rangle} = |vM^t|,$$

die orthogonale Gruppe lässt daher auch die euklidische Norm $|\cdot|$ auf \mathbb{R}^n invariant.

Die Gruppe

$$\text{SL}_n(K) := \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

heisst die *spezielle lineare Gruppe vom Grad n* über \mathbb{R} . Ihr Durchschnitt mit der orthogonalen Gruppe

$$\text{SO}(n) := \text{O}(n) \cap \text{SL}_n(\mathbb{R})$$

heisst die *spezielle orthogonale Gruppe vom Grad n* über \mathbb{R} .

Im Fall $n = 2$ zeigt eine direkte Rechnung, dass die orthogonalen Matrizen genau die folgenden sind:

$$\text{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\}.$$

Die Matrizen vom ersten Typ bilden die Untergruppe $\text{SO}(2)$ und repräsentieren Drehungen; genauer entspricht die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

einer Drehung um $(0, 0)$ um den Winkel α . Die Matrizen vom zweiten Typ repräsentieren Spiegelungen.

Betrachte nun die folgende in Blockmatrizen geschriebene Teilmenge von $\text{GL}_3(\mathbb{R})$:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \mid M \in \text{O}(2), v \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dabei bezeichnet $v \in \mathbb{R}^2$ ausnahmsweise einen Spaltenvektor, während wir ja ansonsten Punkte $A \in \mathbb{R}^2$ als Zeilenvektoren ansehen. Man zeigt schnell, dass jedes Produkt von Elementen von G , das Inverse jedes Elements von G , sowie die Einheitsmatrix in G liegen. Somit ist G eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$. Zu jedem Element $g = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ assoziieren wir die affin-lineare Abbildung

$$(8.16) \quad \varphi_g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A \mapsto AM^t + v^t.$$

Satz 8.17 *Diese Abbildung induziert einen Isomorphismus von G auf die Bewegungsgruppe der kartesischen Ebene \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Dass φ_g eine Bewegung von \mathbb{R}^2 ist, rechnet man direkt nach mittels der Definitionen 7.2 und 8.1 und der Tatsache, dass $O(2)$ das Skalarprodukt invariant lässt. Für jede Strecke AB ist zum Beispiel

$$|B - A| = |(B - A)M^t| = |(BM^t + v^t) - (AM^t + v^t)| = |\varphi_g(B) - \varphi_g(A)|$$

und somit $AB \cong \varphi_g(A)\varphi_g(B)$.

Als nächstes sei $\varphi_h: A \mapsto AN^t + w^t$ die Abbildung zu einem zweiten Element $h = \begin{pmatrix} N & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$A \mapsto \varphi_h(\varphi_g(A)) = (AM^t + v^t)N^t + w^t = AM^tN^t + v^tN^t + w^t = A(NM)^t + (Nv + w)^t$$

gleich der Abbildung φ_{hg} , die zu dem Produkt der Matrizen

$$hg = \begin{pmatrix} N & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NM & Nv + w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

assoziiert ist. Dies zeigt, dass die Abbildung von G in die Gruppe der Bewegungen von \mathbb{R}^2 ein Gruppenhomomorphismus ist.

Für die Bijektivität benutzen wir Satz 8.2. Seien $O := (0, 0)$ der Ursprung und $A := (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ sowie $B := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Betrachte eine beliebige Bewegung φ und ein beliebiges Element

$$g = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Nach Satz 8.2 gilt $\varphi = \varphi_g$ genau dann, wenn $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \varphi_g(\overrightarrow{OA})$ ist und $\varphi(B)$ und $\varphi_g(B)$ auf derselben Seite der Geraden $\varphi(\overrightarrow{OA})$ liegen. Da die Strecken OA und OB sowie deren Bilder unter φ und φ_g alle dieselbe Länge 1 haben, und da $\sphericalangle AOB$ und seine Bilder unter φ und φ_g alle rechte Winkel sind, sind diese Bedingungen äquivalent zu $\varphi(O) = \varphi_g(O)$ und $\varphi(A) = \varphi_g(A)$ und $\varphi(B) = \varphi_g(B)$. Durch direkte Rechnung zeigt man

$$\varphi_g(O) = (e, f) \quad \text{und} \quad \varphi_g(A) = (a + e, b + f) \quad \text{und} \quad \varphi_g(B) = (c + e, d + f).$$

Es gibt also eindeutige Koeffizienten a bis f , so dass die genannten Gleichungen gelten. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die dadurch bestimmte Matrix g tatsächlich in G liegt. Aber dass $\varphi(OA)$ und $\varphi(OB)$ die Länge 1 haben und orthogonal zueinander sind, bedeutet genau $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$ und $ac + bd = 0$. Diese Gleichungen zusammen sind äquivalent zu $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$, also zu $g \in G$, wie gewünscht. Damit haben wir gezeigt, dass für jede Bewegung φ ein eindeutiges $g \in G$ existiert mit $\varphi = \varphi_g$. Somit ist der Homomorphismus $g \mapsto \varphi_g$ bijektiv. \square

Nun können wir die Bewegungen der kartesischen Ebene klassifizieren. Eine Bewegung der Form $A \mapsto A + B$ für $B \in \mathbb{R}^2$ heisst eine *Translation*. Eine Spiegelung an einer Geraden g gefolgt von einer nichttrivialen Translation in Richtung von g heisst eine *Gleitspiegelung*.

Proposition 8.18 *Die zu einer Matrix*

$$g = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

assoziierte Bewegung φ_g ist

- (a) die Identität genau dann, wenn g das Einselement ist,
- (b) eine Translation genau dann, wenn $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist,
- (c) eine nicht-triviale Drehung genau dann, wenn $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $a \neq 1$ ist,
- (d) eine Punktspiegelung genau dann, wenn $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist,
- (e) eine Spiegelung genau dann, wenn $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ und $(1+a)e + bf = 0$ sowie $(1-a)f + be = 0$ ist,
- (f) eine Gleitspiegelung genau dann, wenn $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ ist, sowie $(1+a)e + bf \neq 0$ oder $(1-a)f + be \neq 0$ ist.

Beweis Übungsaufgabe. Bestimmen Sie jeweils den Drehpunkt bzw. die Spiegelungsgerade.

Bemerkung 8.19 Translationen einer euklidischen Ebene lassen sich auch abstrakt definieren, zum Beispiel als die Identität sowie alle Bewegungen φ ohne Fixpunkte, so dass $A\varphi(A) \cong B\varphi(B)$ ist für alle Punkte A und B . Dann kann man auch ohne kartesische Koordinaten beweisen, dass die Translationen eine abelsche Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen bilden, dass für je zwei Punkte A und A' genau eine Translation φ existiert mit $\varphi(A) = A'$, und dass jede Translation jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbildet. Im Fall der kartesischen Ebene ist die Gruppe der Translationen auf natürliche Weise isomorph zu der additiven Gruppe des Vektorraums \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 8.20 Unter einem *regelmässigen* Gebilde versteht man generell eine Teilmenge oder eine Zerlegung eines Raums, welche unter gewissen Symmetrien invariant ist. Das kann ein regelmässiges Ornament, eine sich wiederholende Parkettierung, ein Tapetenmuster, ein regelmässiges Polygon sein, oder im dreidimensionalen Raum ein regelmässiger Polyeder oder ein Kristall, und anderes mehr. Die Klassifikation solcher Gebilde schliesst dann die Klassifikation der Gruppe seiner Symmetrien mit ein. Zum Beispiel ist die Symmetriegruppe eines regelmässigen ebenen Polygons mit $n \geq 3$ Seiten eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $2n$, bestehend aus n Drehungen und n Spiegelungen, genannt Diedergruppe (sprich „Di-eder“). Wichtig sind die sogenannten *Tapetengruppen*, d.h., die Gruppen von Bewegungen der euklidischen Ebene, die eine Untergruppe von endlichem Index besitzen, welche von zwei \mathbb{R} -linear unabhängigen Translationen erzeugt werden. Ihr Analogon im dreidimensionalen euklidischen Raum sind die *kristallographischen Gruppen*, die eine fundamentale Rolle in der Klassifikation realer Kristalle spielen.

9 Der projektive Raum

Sei K ein beliebiger Körper und n eine natürliche Zahl. Die folgende Menge nennt man den n -dimensionalen affinen (Standard-) Raum über K :

$$\mathbb{A}^n(K) := K^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}.$$

Dieselbe Menge ist zwar auch der n -dimensionale Standard-Vektorraum über K ; wir bezeichnen ihn aber dann als affinen Raum, wenn wir uns für Aussagen interessieren, bei denen der Ursprung keine Sonderrolle spielt.

Für die Konstruktion des projektiven Raums sei $\underline{0} := (0, \dots, 0)$ der Ursprung in K^{n+1} . Wir schreiben die Elemente von $K^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ in der Form $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ und nennen zwei solche Elemente \underline{x} und \underline{y} äquivalent, wenn $\underline{y} = t\underline{x} = (tx_0, tx_1, \dots, tx_n)$ ist für ein $t \in K^* := K \setminus \{0\}$. Man zeigt schnell, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert. Die Menge der Äquivalenzklassen nennt man den n -dimensionalen projektiven Raum über K :

$$\mathbb{P}^n(K) := (K^{n+1} \setminus \{\underline{0}\})/K^*.$$

Die Äquivalenzklasse eines Elements $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ bezeichnet man mit $(x_0 : \dots : x_n)$. Man darf sie nicht verwechseln mit dem Tupel (x_0, \dots, x_n) .

Anders gesagt ist $\mathbb{P}^n(K)$ die Menge aller Ausdrücke der Form $(x_0 : \dots : x_n)$ mit Koeffizienten $x_0, \dots, x_n \in K$, nicht alle gleich 0, wobei $(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n)$ ist genau dann, wenn ein $t \in K^*$ existiert mit $\forall 0 \leq i \leq n : y_i = tx_i$.

Da wir Geometrie treiben wollen, bezeichnen wir die Elemente von $\mathbb{A}^n(K)$ und $\mathbb{P}^n(K)$ als Punkte. Für $n = 0$ haben beide Räume genau ein Element, nämlich das leere Tupel $() \in \mathbb{A}^0(K)$, beziehungsweise die Äquivalenzklasse $(1) \in \mathbb{P}^0(K)$. Für $n \geq 1$ betrachte irgendeinen Punkt $P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$. Ist $x_0 = 0$, so entspricht P eindeutig dem Punkt $(x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$. Andernfalls ist er nach Definition der Äquivalenzrelation gleich $(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0})$, und das Tupel $(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ ist der einzige Repräsentant von P mit nullter Koordinate 1; er entspricht also eindeutig dem Punkt $(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in \mathbb{A}^n(K)$. Mit anderen Worten ist $\mathbb{P}^n(K)$ die disjunkte Vereinigung der Bilder der injektiven Abbildungen

$$(9.1) \quad \mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n),$$

$$(9.2) \quad \mathbb{P}^{n-1}(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K), \quad (x_1 : \dots : x_n) \mapsto (0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Via dieser Inklusionen können wir den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$ als Erweiterung des affinen Raums $\mathbb{A}^n(K)$ durch eine Kopie des um eine Dimension kleineren projektiven Raums $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ ansehen. Vom $\mathbb{A}^n(K)$ aus gesehen stellen wir uns die zusätzlichen Punkte als „Punkte im Unendlichen“ vor, die man erreicht, indem man entlang Geraden „nach unendlich geht“. Der Nutzen dieser Punkte wie auch die Namensgebung „projektiver Raum“ lässt sich anhand von Punktprojektionen zwischen zueinander nicht parallelen Hyperebenen im K^{n+1} erklären, wie folgt.

Zunächst beachte man, dass zwei Vektoren $\underline{x}, \underline{y} \in K^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ genau dann denselben Punkt in $\mathbb{P}^n(K)$ definieren, wenn die zugehörigen eindimensionalen Untervektorräume

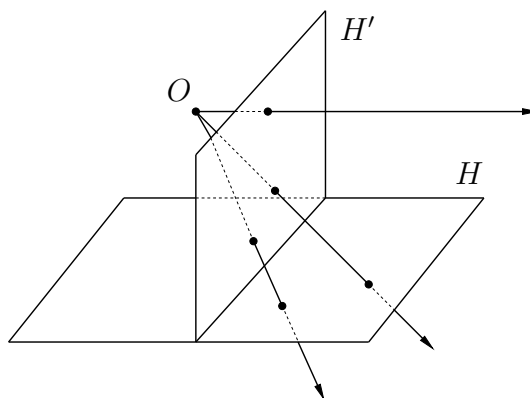
$K\underline{x} := \{t\underline{x} \mid t \in K\}$ und $K\underline{y}$ gleich sind. Dadurch können wir $\mathbb{P}^n(K)$ mit der Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von K^{n+1} identifizieren.

Sodann sei $H \subset K^{n+1}$ ein beliebiger affin-linearer Unterraum der Dimension n (eine sogenannte *Hyperebene*), der den Ursprung $\underline{0}$ nicht enthält, das heisst, eine Teilmenge der Form $V + \underline{x} := \{\underline{v} + \underline{x} \mid \underline{v} \in V\}$ für einen Untervektorraum $V \subset K^{n+1}$ der Dimension n und einen Vektor $\underline{x} \in K^{n+1} \setminus V$. Jeder Punkt $\underline{y} \in H$ bestimmt dann einen eindimensionalen Untervektorraum $K\underline{y} \subset K^{n+1}$ und ist wegen $K\underline{y} \cap H = \{\underline{y}\}$ durch diesen eindeutig bestimmt. Die lineare Algebra sagt uns, dass umgekehrt für jeden eindimensionalen Untervektorraum $L \subset K^{n+1}$ gilt:

$$L \cap H = \begin{cases} \{\underline{y}\} & \text{für ein eindeutiges } \underline{y} \in H, \text{ falls } L \not\subset V \text{ ist,} \\ \emptyset & \text{falls } L \subset V \text{ ist.} \end{cases}$$

Insbesondere haben wir also eine Bijektion zwischen H und der Menge aller eindimensionalen Untervektorräume $L \subset K^{n+1}$ mit $L \not\subset V$. Im Spezialfall $H = \{(1, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$ identifizieren wir H durch Weglassen der nullten Koordinate mit $\mathbb{A}^n(K)$; die soeben beschriebene Bijektion entspricht dann genau der Inklusion (9.1).

Sei nun $H' = V' + \underline{x}'$ ein zweiter affin-linearer Unterraum der Dimension n mit $\underline{0} \notin H'$. Dann entspricht jeder eindimensionale Untervektorraum $L \subset K^{n+1}$ mit $L \not\subset V$ und $L \not\subset V'$ sowohl einem Punkt $\underline{y} \in H \setminus V'$ als auch einem Punkt $\underline{y}' \in H' \setminus V$. Geometrisch ist die Beziehung zwischen \underline{y} und \underline{y}' dadurch beschrieben, dass \underline{y} und \underline{y}' und $\underline{0}$ auf einer Geraden liegen, nämlich auf L . Wir erhalten also eine Bijektion zwischen $H \setminus V'$ und $H' \setminus V$, welche gegeben ist durch eine Punktprojektion mit Zentrum in $\underline{0}$.



Für ein reales Beispiel betrachte man den Fall, wir machen ein Foto einer ebenen Landschaft. Dann liegt das Projektionszentrum in der Linse des Fotoapparats, und die Projektion bildet die horizontale Landschaftsebene H auf die vertikale Bildebene H' ab. Zwei parallele Geraden in H , wie zum Beispiel die Schienen eines schnurgeraden Eisenbahngleises, entsprechen dann Geraden in H' , welche sich auf der Horizontlinie treffen. Dieser Schnittpunkt in H' repräsentiert den in H nicht existierenden „unendlich fernen Schnittpunkt“ der Parallelen.



Für alle Fragen über den affinen Raum H , welche unter Punktprojektionen invariant sind, ist es folglich günstig, den Raum um die nötigen „unendlich fernen Punkte“ zu erweitern. Man kann dies auf eine etwas künstliche Weise tun, indem man einfach für

jede Äquivalenzklasse paralleler Geraden in H einen neuen Punkt dazunimmt. Dann spielen diese neuen Punkte aber a priori eine Sonderrolle, und es muss erst noch erklärt werden, wie sie zu den alten Punkten in Beziehung stehen sollen. In der obigen Konstruktion von $\mathbb{P}^n(K)$ verschwindet diese Asymmetrie, indem man die Beziehungen zwischen allen Punkten $(x_0 : \dots : x_n)$ in Termen ihrer projektiven Koordinaten x_0, \dots, x_n ausdrückt, unabhängig davon, ob x_0 verschwindet oder nicht.

Projektive lineare Transformationen:

Der etablierten Konvention folgend schreiben wir die Elemente von $\mathbb{A}^n(K)$ und $\mathbb{P}^n(K)$ in Zeilenform. Das ist etwas ungünstig, sobald wir Gruppenoperationen beschreiben wollen, aber damit müssen wir leben. Die allgemeine lineare Gruppe operiert dann nämlich durch Multiplikation von rechts, anstatt wie üblich von links. Um dennoch die übliche Formel für die Komposition von Abbildungen zu erhalten, multiplizieren wir wie in Kapitel 8 mit der transponierten Matrix von rechts.

Genauer assoziieren wir zu jeder Matrix $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ die Bijektion

$$K^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow K^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \underline{x} \mapsto \underline{x} \cdot M^t.$$

Da diese mit der skalaren Multiplikation verträglich ist, bildet sie Äquivalenzklassen auf Äquivalenzklassen ab und induziert somit eine Bijektion

$$\psi_M: \mathbb{P}^n(K) \rightarrow \mathbb{P}^n(K).$$

Die Rechnung

$$\psi_{M_1 M_2}(\underline{x}) = \underline{x} \cdot (M_1 M_2)^t = (\underline{x} \cdot M_2^t) \cdot M_1^t = \psi_{M_2}(\underline{x}) \cdot M_1^t = \psi_{M_1}(\psi_{M_2}(\underline{x}))$$

zeigt dann, dass $\psi_{M_1 M_2} = \psi_{M_1} \circ \psi_{M_2}$ ist für alle $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$. Dies zusammen mit dem Umstand, dass die Einheitsmatrix die identische Abbildung induziert, besagt, dass dadurch eine *Links-Operation* der Gruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ auf der Menge $\mathbb{P}^n(K)$ definiert ist. Ausserdem gilt $\psi_M = \psi_{tM}$ für jeden Skalar $t \in K^*$; somit hängt ψ_M nur von dem Bild $[M]$ von M in der Faktorgruppe

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(K) := \mathrm{GL}_{n+1}(K)/K^*$$

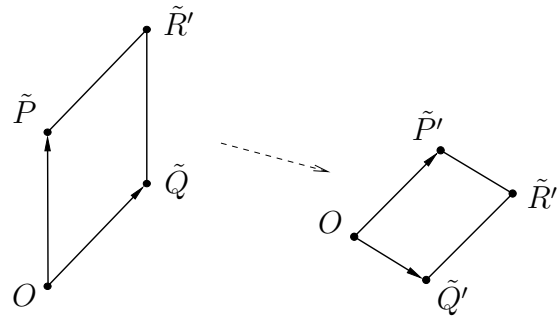
ab. Diese Faktorgruppe heisst die *projektive lineare Gruppe der Grösse $n+1$ über K* . Durch $[M] \mapsto \psi_M$ ist daher eine Links-Operation von $\mathrm{PGL}_{n+1}(K)$ auf $\mathbb{P}^n(K)$ erklärt.

Die projektive Gerade:

Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^1(K)$ über K heisst die *projektive Gerade über K* . Seine durch $\mathrm{PGL}_2(K)$ beschriebenen projektiven linearen Transformationen werden wir im nächsten Kapitel genauer untersuchen. Schon hier wollen wir jedoch die folgende wichtige Eigenschaft herleiten:

Proposition 9.3 *Für je drei verschiedene Punkte $P, Q, R \in \mathbb{P}^1(K)$ und je drei verschiedene Punkte $P', Q', R' \in \mathbb{P}^1(K)$ existiert genau ein Element $g \in \mathrm{PGL}_2(K)$ mit $gP = P'$ und $gQ = Q'$ und $gR = R'$.*

Beweis. Seien $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R} \in K^2 \setminus \{0\}$ Repräsentanten der Äquivalenzklassen P, Q, R . Dass $P \neq Q$ ist, bedeutet dann, dass \tilde{P} und \tilde{Q} linear unabhängig als Elemente des K -Vektorraums K^2 sind. Sie bilden daher eine Basis von K^2 , und somit ist $\tilde{R} = a\tilde{P} + b\tilde{Q}$ für eindeutige $a, b \in K$. Dass $P, Q \neq R$ ist, bedeutet dann weiter, dass $a, b \neq 0$ sind. Nach Ersetzen von \tilde{P} durch $a\tilde{P}$ und von \tilde{Q} durch $b\tilde{Q}$ haben wir dann $\tilde{R} = \tilde{P} + \tilde{Q}$. Entsprechend können wir Repräsentanten $\tilde{P}', \tilde{Q}', \tilde{R}' \in K^2 \setminus \{0\}$ der Äquivalenzklassen P', Q', R' wählen, so dass \tilde{P}' und \tilde{Q}' eine Basis von K^2 bilden und $\tilde{R}' = \tilde{P}' + \tilde{Q}'$ ist.



Dann existiert ein eindeutiger Vektorraum-Isomorphismus $K^2 \rightarrow K^2$, welcher \tilde{P} auf \tilde{P}' und \tilde{Q} auf \tilde{Q}' abbildet. Dieser bildet dann auch \tilde{R} auf \tilde{R}' ab. Ausserdem ist er durch eine Matrix $M \in \text{GL}_2(K)$ repräsentiert, und für diese Matrix gilt dann $\psi_M(P) = P'$ und $\psi_M(Q) = Q'$ und $\psi_M(R) = R'$. Die Restklasse von M in $\text{PGL}_2(K)$ hat also die gesuchte Eigenschaft. Dies zeigt die Existenz von g .

Für die Eindeutigkeit betrachte eine weitere Matrix $N \in \text{GL}_2(K)$ mit $\psi_N(P) = P'$ und $\psi_N(Q) = Q'$ und $\psi_N(R) = R'$. Dann gilt $\tilde{P} \cdot N^t = r\tilde{P}'$ und $\tilde{Q} \cdot N^t = s\tilde{Q}'$ und $\tilde{R} \cdot N^t = t\tilde{R}'$ für gewisse Koeffizienten $r, s, t \in K^*$. Wegen $\tilde{R} = \tilde{P} + \tilde{Q}$ und $\tilde{R}' = \tilde{P}' + \tilde{Q}'$ gilt daher $r\tilde{P}' + s\tilde{Q}' = t\tilde{P}' + t\tilde{Q}'$, und wegen der linearen Unabhängigkeit von \tilde{P}' und \tilde{Q}' folgt daraus $r = s = t$. Somit ist $N = tM$ und daher $\psi_N = \psi_M$, und auch die Eindeutigkeit ist gezeigt. \square

Sei \bar{K} die disjunkte Vereinigung $K \sqcup \{\infty\}$ für ein neues Symbol ∞ , welches wir uns als einen „unendlich fernen Punkt“ vorstellen. Die Abbildungen (9.1) und (9.2) induzieren dann eine Bijektion

$$(9.4) \quad i : \bar{K} \longrightarrow \mathbb{P}^1(K), \quad z \mapsto \begin{cases} (1 : z) & \text{für } z \in K, \\ (0 : 1) & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Wenn wir via dieser Bijektion Aussagen von $\mathbb{P}^1(K)$ auf \bar{K} übertragen, so vereinfachen sich viele Formeln, allerdings auf Kosten von Fallunterscheidungen.

Betrachten wir zum Beispiel eine Matrix $M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(K)$. Für alle $z \in K$ mit $cz + d \neq 0$ haben wir dann

$$(1, z) \cdot M^t = (1, z) \cdot \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = (d + cz, b + az) \sim (1, \frac{az+b}{cz+d})$$

und somit $\psi_M(i(z)) = i(\frac{az+b}{cz+d})$. Ähnliche Rechnungen zeigen dann, dass sich die Bijektion ψ_M auf $\mathbb{P}^1(K)$ mittels i überträgt zu einer Bijektion der Gestalt

$$\mu_M := i^{-1} \circ \psi_M \circ i : \bar{K} \rightarrow \bar{K}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in K \text{ mit } cz + d \neq 0, \\ \infty & \text{für } z \in K \text{ mit } cz + d = 0, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty \text{ und } c \neq 0, \\ \infty & \text{für } z = \infty \text{ und } c = 0. \end{cases}$$

Eine solche Abbildung $\bar{K} \rightarrow \bar{K}$ heisst allgemein eine *Möbius-Transformation*. Eine Möbiustransformation ist also eine bestimmte Art von gebrochen linearem Parameterwechsel. Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe, die via $[M] \mapsto \mu_M$ zu $\text{PGL}_2(K)$ isomorph ist.

Für beliebige $a \in K^*$ und $b \in K$ ist die affin-lineare Transformation $z \mapsto az + b$ mit $\infty \mapsto \infty$ eine Möbiustransformation. Ein weiteres Beispiel ist die Abbildung $z \mapsto 1/z$ mit $\infty \mapsto 0 \mapsto \infty$. Aus solchen speziellen Möbiustransformationen kann man bereits alle Möbiustransformationen zusammensetzen:

Proposition 9.5 *Jede Möbiustransformation ist affin-linear oder eine Komposition $\mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1$ mit μ_1 und μ_3 affin-linear und $\mu_2(z) = 1/z$.*

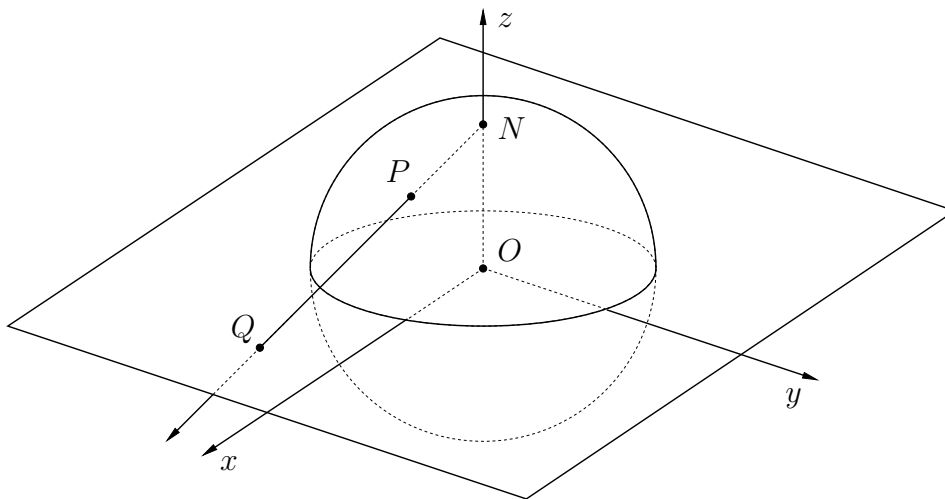
Beweis. Sei $\mu: \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ eine Möbiustransformation mit $\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ für alle $z \in K$ mit $cz+d \neq 0$. Im Fall $c = 0$ ist sie wegen $\frac{az+b}{d} = \frac{a}{d} \cdot z + \frac{b}{d}$ bereits affin-linear. Im Fall $c \neq 0$ berechnen wir für alle $z \in K \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

$$\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}.$$

Also ist $\mu = \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1$ für die speziellen Möbiustransformationen $\mu_1: z \mapsto cz+d$ und $\mu_2: z \mapsto 1/z$ und $\mu_3: z \mapsto \frac{bc-ad}{c} \cdot z + \frac{a}{c}$. \square

Die Riemannsche Zahlenkugel:

Für den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} nennt man $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ oder $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ auch die *Riemannsche Zahlenkugel*. Dieser Name rührt her von einer Bijektion zwischen $\bar{\mathbb{C}}$ und der 2-Sphäre $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, welche durch die *stereographische Projektion* vermittelt ist. Für deren Definition betrachten wir alle Geraden $g \subset \mathbb{R}^3$ durch den „Nordpol“ $N := (0, 0, 1)$, welche nicht in der Ebene $z = 1$ liegen. Jede solche Gerade schneidet die Sphäre S^2 in genau einem weiteren Punkt P und die Ebene $z = 0$ in genau einem Punkt Q , und ist umgekehrt durch P oder



Q eindeutig bestimmt. Durch Projektion entlang dieser Geraden entsprechen sich P und Q , und wir erhalten demnach eine Bijektion zwischen $S^2 \setminus \{N\}$ und der Ebene. Die gesuchte Bijektion $S^2 \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ entsteht daraus durch Identifizieren der Ebene mit \mathbb{C} und Fortsetzen der Abbildung durch $N \leftrightarrow \infty$. Genaues Nachrechnen liefert für $P = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ den Punkt $(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$ in der Ebene, welcher der komplexen Zahl $\frac{x}{1-z} + i \cdot \frac{y}{1-z}$ entspricht. Die Bijektion ist also gegeben durch

$$(9.6) \quad \pi: S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, (x, y, z) \mapsto \begin{cases} \frac{x+iy}{1-z} & \text{für } z \neq 1, \\ \infty & \text{für } z = 1. \end{cases}$$

Die Umkehrabbildung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} x + iy &\mapsto (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)/(x^2 + y^2 + 1) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \\ \infty &\mapsto (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Für andere Zwecke, als die Namensgebung „Zahlenkugel“ zu erklären, werden wir die stereographische Projektion hier nicht benötigen.

10 Möbius-Transformationen

Wir beginnen mit einer klassischen geometrischen Konstruktion und besprechen danach ihre Beziehung zu Möbiustransformationen.

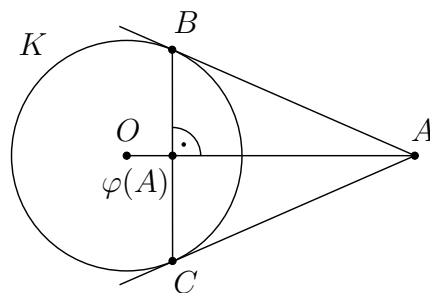
Inversion:

Sei \mathcal{E} eine euklidische Ebene, die alle Hilbert-Axiome erfüllt. Für jeden Punkt O und jede Strecke AB heisst die Menge $K := \{P \in \mathcal{E} \mid OP \cong AB\}$ der *Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $[AB]$* . Man zeigt leicht, dass in diesem Fall Mittelpunkt und Radius durch die Menge K eindeutig bestimmt sind. Wir benutzen im folgenden die aus der Schulgeometrie bekannten elementaren Eigenschaften von Kreisen und Tangenten.

Zu jedem Kreis K mit Mittelpunkt O assoziieren wir eine nicht-lineare Transformation von $\mathcal{E} \setminus \{O\}$, das heisst eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{E} \setminus \{O\} \rightarrow \mathcal{E} \setminus \{O\},$$

genannt *Inversion an K* , wie folgt. Sei $A \in \mathcal{E} \setminus \{O\}$ beliebig. Im Fall $A \in K$ definieren wir $\varphi(A) := A$. Liegt A ausserhalb des Kreises, so besitzt K genau zwei verschiedene Tangenten, die durch A gehen. Seien B und C die zwei verschiedenen Punkte, in denen diese Tangenten K berühren. Dann definieren wir $\varphi(A)$ als den Schnittpunkt der zueinander orthogonalen Geraden \overline{OA} und \overline{BC} . Liegt A innerhalb des Kreises, so gehen wir genau umgekehrt vor und betrachten die Gerade, welche die Gerade \overline{OA} in A orthogonal schneidet. Diese schneidet den Kreis K in genau zwei verschiedenen Punkten, sagen wir in B und C . Wir definieren dann $\varphi(A)$ als den Schnittpunkt der Tangenten an K in B und C .



Es erfordert ein wenig Überlegung zu zeigen, dass diese Vorschrift tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung liefert. Man ersieht dann aber direkt aus der Konstruktion, dass die Abbildung zu sich selbst invers ist, d.h., dass $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$ gilt. Insbesondere ist die Abbildung also bijektiv. Da für $A \notin K$ die Gerade \overline{OA} den Kreis K orthogonal schneidet und je einer der Punkte A , $\varphi(A)$ innerhalb bzw. ausserhalb von K liegt, ähnelt die Inversion der Spiegelung an einer Geraden. Wir können sie daher ansehen als eine Art „Spiegelung an einem Kreis“.

Um die Abbildung in Koordinaten zu bestimmen, wählen wir ein Koordinatensystem mit Ursprung O , so dass K den Radius 1 besitzt. Wir rechnen also in $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ mit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Da wir dann immer noch eine beliebige Drehung um O anwenden können, betrachten wir zuerst den Spezialfall $A = (x, 0)$ mit $x > 0$. Für $x = 1$ gilt dann $\varphi((1, 0)) = (1, 0)$. Für $x < 1$ gilt $B, C = (x, \pm y)$ mit $y := \sqrt{1 - x^2}$. Die entsprechenden Tangenten sind dann die Geraden $\{(x, \pm y) + t(y, \mp x) \mid t \in \mathbb{R}\}$, und diese schneiden sich in dem durch $t = \frac{y}{x}$ parametrisierten Punkt

$$(x, \pm y) + \frac{y}{x} \cdot (y, \mp x) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x}, 0\right) = \left(\frac{1}{x}, 0\right).$$

Also gilt $\varphi((x, 0)) = (\frac{1}{x}, 0)$ für $0 < x < 1$. Wegen $\varphi = \varphi^{-1}$ gilt dann dieselbe Formel auch für $x > 1$, und für $x = 1$ gilt sie sowieso schon. Daher haben wir $\varphi((x, 0)) = (\frac{1}{x}, 0)$ für alle $x > 0$. Aufgrund der Rotationssymmetrie, und da nach Konstruktion stets $\varphi(A)$ auf dem Strahl \overrightarrow{OA} liegt, folgt dann

$$\varphi((x, y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Diese Formel können wir am elegantesten ausdrücken, indem wir wie üblich \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} identifizieren durch $(x, y) \mapsto x + iy$, denn dann ist

$$\varphi(x + iy) = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x-iy}$$

und somit $\varphi(z) = 1/\bar{z}$.

Der Hauptnutzen der Inversion liegt in der folgenden Eigenschaft:

Proposition 10.1 Sei $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ die Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt O .

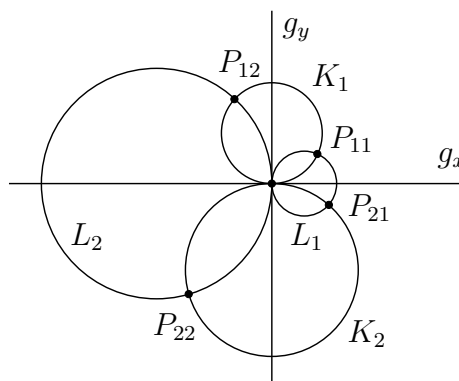
- (a) Für jeden Kreis K mit $O \notin K$ ist $\varphi(K)$ ein Kreis.
- (b) Für jeden Kreis K mit $O \in K$ ist $\varphi(K \setminus \{O\})$ eine Gerade.
- (c) Für jede Gerade g mit $O \notin g$ ist $\varphi(g) \cup \{O\}$ ein Kreis.
- (d) Für jede Gerade g mit $O \in g$ ist $\varphi(g \setminus \{O\}) \cup \{O\}$ eine Gerade.

Beweis Übungsaufgabe.

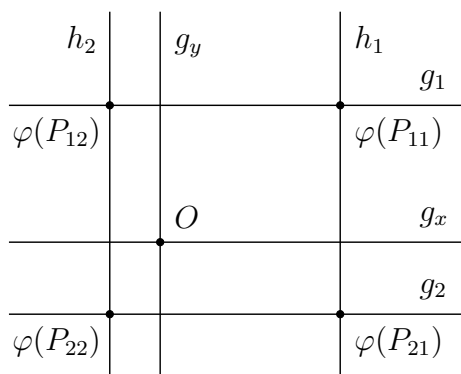
Viele interessante Sätze über Kreise kann man auf elegante und kurze Weise mit Hilfe der Inversion beweisen, zum Beispiel den folgenden:

Proposition 10.2 Seien K_1, K_2, L_1, L_2 vier verschiedene Kreise durch einen Punkt O , so dass dort K_1 und K_2 zueinander tangential und orthogonal zu L_1 und L_2 sind. Für je zwei Indizes $i, j \in \{1, 2\}$ sei P_{ij} der von O verschiedene Schnittpunkt von K_i und L_j . Dann liegen die vier Punkte $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ auf einem Kreis oder einer Geraden.

Beweis. Wir wählen ein Koordinatensystem mit Ursprung O , so dass K_1, K_2 tangential zur x -Achse g_x und L_1, L_2 tangential zur y -Achse g_y liegen. Sei φ die Inversion an irgendeinem Kreis mit Mittelpunkt O . Nach Proposition 10.1 ist dann $g_i := \varphi(K_i \setminus \{O\})$ eine Gerade mit $O \notin g_i$. Wegen $K_i \cap g_x = \{O\}$ sind $K_i \setminus \{O\}$ und $g_x \setminus \{O\}$ disjunkt; aufgrund der Bijektivität von φ sind daher auch g_i und $\varphi(g_x \setminus \{O\}) = g_x \setminus \{O\}$ disjunkt. Da ausserdem $O \notin g_i$ ist, sind g_i und g_x disjunkt und somit parallel.



Entsprechend ist $h_j := \varphi(L_j \setminus \{O\})$ eine Gerade, die parallel zu g_y ist. Ausserdem sind g_1, g_2, h_1, h_2 alle verschieden. Nach Konstruktion gilt weiter $g_i \cap h_j = \{\varphi(P_{ij})\}$ für alle Indizes $i, j \in \{1, 2\}$. Diese Bildpunkte sind aber die Ecken eines achsenparallelen Rechtecks, haben also denselben Abstand von dem Mittelpunkt des Rechtecks und liegen somit auf einem Kreis. Nach Proposition 10.1 liegen die Punkte P_{ij} daher selbst auf einem Kreis oder einer Geraden, wie zu zeigen war. □



Verallgemeinerte Kreise:

Wir erinnern uns an die Definition $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. Die Inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$ lässt sich auf natürliche Weise fortsetzen zu einer Bijektion $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ durch $0 \mapsto \infty \mapsto 0$. Sie unterscheidet sich dann von einer Möbiustransformation lediglich um die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$. Letztere bildet natürlich Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise ab; darum gilt die Aussage von Proposition 10.1 genauso für die Abbildung $z \mapsto 1/z$. Diese überträgt sich nun auf alle Möbiustransformationen wie folgt:

Definition 10.3 *Ein verallgemeinerter Kreis in $\bar{\mathbb{C}}$ ist entweder ein Kreis in \mathbb{C} oder die Menge $g \sqcup \{\infty\}$ für eine Gerade $g \subset \mathbb{C}$.*

Proposition 10.4 *Jede Möbiustransformation bildet jeden verallgemeinerten Kreis auf einen verallgemeinerten Kreis ab.*

Beweis. Wie man leicht zeigt, bildet jede affin-lineare Möbiustransformation $z \mapsto az + b$ Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden ab; besitzt also die gewünschte Eigenschaft. Für die Möbiustransformation $z \mapsto 1/z$ folgt sie, wie oben erklärt, aus Proposition 10.1. Sie folgt somit für alle Möbiustransformationen mittels Proposition 9.5. □

Proposition 10.5 *Je drei verschiedene Punkte in $\bar{\mathbb{C}}$ liegen auf genau einem verallgemeinerten Kreis.*

Beweis. Dies ist Ausdruck der aus der Elementargeometrie bekannten Tatsache, dass je drei verschiedene Punkte der euklidischen Ebene entweder auf einer eindeutigen Geraden oder, falls sie nicht kollinear sind, auf einem eindeutigen Kreis liegen. Hier ist ein Beweis mit Hilfe von Möbiustransformationen:

Nach Proposition 10.4 ist die Aussage invariant unter Möbiustransformationen. Nach Proposition 9.3 können wir also oBdA annehmen, dass die gegebenen Punkte gleich

0, 1, ∞ sind. Der gesuchte verallgemeinerte Kreis muss dann ∞ enthalten, also gleich $g \sqcup \{\infty\}$ sein für eine Gerade g , welche die Punkte 0 und 1 enthalten muss. Es existiert aber genau eine Gerade mit diesen Eigenschaften, nämlich $g = \mathbb{R}$. \square

Lemma 10.6 *Für jeden verallgemeinerten Kreis K existiert eine Möbiustransformation μ mit $\mu(K) = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$.*

Beweis. Im Fall $\infty \in K$ ist $K \setminus \{\infty\}$ eine Gerade, und eine schnelle direkte Rechnung liefert eine affin-lineare Transformation $\mu: z \mapsto az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $\mu(K \setminus \{\infty\}) = \mathbb{R}$. Die eindeutige Erweiterung von μ zu einer Möbiustransformation $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ hat dann die gesuchte Eigenschaft.

Im Fall $\infty \notin K$ ist K ein Kreis in \mathbb{C} . Wähle einen beliebigen Punkt $z_0 \in K$ und betrachte die Möbiustransformationen $\mu_1: z \mapsto z - z_0$, $\infty \mapsto \infty$ sowie $\mu_2: z \mapsto 1/z$, $0 \mapsto \infty \mapsto 0$. Dann ist $\mu_1(K)$ ein Kreis durch den Nullpunkt, und nach Proposition 10.4 ist somit $\mu_2(\mu_1(K))$ ein verallgemeinerter Kreis mit $\infty \in \mu_2(\mu_1(K))$. Nach dem bereits bewiesenen Fall existiert darum eine Möbiustransformation μ_3 mit $\mu_3(\mu_2(\mu_1(K))) = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$. Also hat die zusammengesetzte Möbiustransformation $\mu := \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1$ die gesuchte Eigenschaft. \square

Proposition 10.7 *Für je zwei verallgemeinerte Kreise K und K' sowie je zwei Punkte $P \in \bar{\mathbb{C}} \setminus K$ und $P' \in \bar{\mathbb{C}} \setminus K'$ existiert eine Möbiustransformation μ mit $\mu(K) = K'$ und $\mu(P) = P'$.*

Beweis. Nach Lemma 10.6 existieren Möbiustransformationen ν und ν' mit $\nu(K) = \nu'(K') = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$. Dann sind $\nu(P)$ und $\nu'(P')$ Punkte in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wir suchen eine affin-lineare Transformation $\mu': z \mapsto \alpha z + \beta$ mit $\mu'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $\mu'(\nu(P)) = \nu'(P')$. Die erste dieser Gleichungen ist sicher erfüllt, wenn $\alpha \in \mathbb{R}^*$ und $\beta \in \mathbb{R}$ ist. Für die zweite schreiben wir $\nu(P) = a + bi$ und $\nu'(P') = a' + b'i$ mit $a, a' \in \mathbb{R}$ und $b, b' \in \mathbb{R}^*$. Die zweite Gleichung ist dann äquivalent zu $\alpha(a + bi) + \beta = (\alpha a + \beta) + \alpha bi = a' + b'i$, für reelle α und β also zu $\alpha a + \beta = a'$ und $\alpha b = b'$. Diese beiden Gleichungen haben die eindeutige Lösung $\alpha = b'/b \in \mathbb{R}^*$ und $\beta = a' - ab'/b \in \mathbb{R}$. Folglich existiert die gesuchte affin-lineare Transformation μ' . Ihre Erweiterung durch $\infty \mapsto \infty$ hat dann die Eigenschaften $\mu'(\nu(K)) = \nu'(K')$ und $\mu'(\nu(P)) = \nu'(P')$. Die zusammengesetzte Möbiustransformation $\mu := \nu'^{-1} \circ \mu' \circ \nu$ erfüllt daher die geforderten Bedingungen. \square

Schliesslich betrachten wir das Komplement eines verallgemeinerten Kreises $K \subset \bar{\mathbb{C}}$. Im Fall $K = g \sqcup \{\infty\}$ besteht $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$ genau aus den beiden Seiten der Geraden g in \mathbb{C} (vergleiche Proposition 3.7). Im Fall $K \subset \mathbb{C}$ besteht $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$ einerseits aus dem Inneren des Kreises K und andererseits aus dem Äusseren von K zusammen mit dem Punkt ∞ . In jedem Fall ist damit $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$ die disjunkte Vereinigung zweier wohlbestimmter Teile.

Definition 10.8 *Diese Teile nennen wir die Seiten von K .*

Proposition 10.9 Jede Möbiustransformation μ bildet jede Seite jedes verallgemeinerten Kreises K auf eine Seite von $\mu(K)$ ab.

Beweis. (Skizze) Für affin-lineare Transformationen folgt das aus einer leichten direkten Rechnung. Mittels Proposition 9.5 können wir somit den allgemeinen Fall auf den Fall $\mu(z) = 1/z$ reduzieren. Ausserdem gilt die entsprechende Aussage für die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ mit $\infty \mapsto \infty$, so dass es genügt, sie für die Inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$ zu beweisen. Das erreicht man aber durch praktisch dieselben Rechnungen wie im Beweis von Proposition 10.1, indem man jeweils „=“ durch „<“ oder „>“ ersetzt. \square

Standardbeispiele für Seiten von verallgemeinerten Kreisen sind die *obere Halbebene*

$$(10.10) \quad \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

als Seite von $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$, und die offene Einheitskreisscheibe

$$(10.11) \quad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

als Seite des Einheitskreises $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Wir suchen eine Möbiustransformation μ_0 mit $\mu_0(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. Dass eine solche existiert, folgt schon ohne Rechnung aus den bisherigen Resultaten. Denn nach Proposition 10.7 existiert eine Möbiustransformation μ_0 mit $\mu_0(\bar{\mathbb{R}}) = S^1$, welche zusätzlich den Punkt $i \in \mathbb{H}$ auf den Punkt $0 \in \mathbb{D}$ abbildet. Nach Proposition 10.9 ist dann $\mu_0(\mathbb{H})$ eine Seite von S^1 , also entweder gleich \mathbb{D} oder gleich dem Äusseren $\bar{\mathbb{C}} \setminus (S^1 \cup \mathbb{D})$. Wegen $\mu_0(\mathbb{H}) \ni \mu_0(i) = 0 \in \mathbb{D}$ ist aber der zweite Fall unmöglich; darum gilt $\mu_0(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$, wie gewünscht.

Nachdem wir wissen, dass ein solches μ_0 existiert, können wir ein konkretes finden mit folgender Überlegung. Damit $\mu_0(\bar{\mathbb{R}}) = S^1$ gelten kann, müssen die Bilder der Punkte $1, 0, -1 \in \bar{\mathbb{R}}$ auf dem Kreis S^1 liegen. Sei also μ_0 eine beliebige Möbiustransformation mit $\mu_0(1), \mu_0(0), \mu_0(-1) \in S^1$. Nach Proposition 10.4 ist dann auch $\mu_0(\bar{\mathbb{R}})$ ein verallgemeinerter Kreis, der diese Bildpunkte enthält. Da die Bildpunkte aufgrund der Bijektivität von μ_0 paarweise verschieden sind, folgt aus Proposition 10.5 dann $\mu_0(\bar{\mathbb{R}}) = S^1$. Mit Glück gilt dann bereits $\mu_0(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$, andernfalls bildet μ_0 die untere Halbebene auf \mathbb{D} ab, und die gewünschte Eigenschaft gilt nach Ersetzen von μ_0 durch die Abbildung $z \mapsto \mu_0(-z)$.

Nach Proposition 9.3 können wir die drei Bildpunkte nun aber beliebig vorschreiben. Wenn wir zum Beispiel $\mu_0(0) = 1$ und $\mu_0(\pm 1) = \pm i$ fordern, dies in den Ansatz $\mu_0(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ für zu bestimmende $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ einsetzen und auflösen, so finden wir, dass die Möbiustransformation

$$(10.12) \quad z \mapsto \mu_0(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

die Gleichungen für die Punkte erfüllt und deshalb $\bar{\mathbb{R}}$ auf S^1 abbildet. Da sie ausserdem $i \in \mathbb{H}$ auf $0 \in \mathbb{D}$ abbildet, hat sie somit die gesuchte Eigenschaft $\mu_0(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. Ihre Umkehrabbildung berechnet sich durch Auflösen der Gleichung $w = \frac{i-z}{i+z}$ nach z zu

$$(10.13) \quad w \mapsto \mu_0^{-1}(w) = i \cdot \frac{1 - w}{1 + w}.$$

Proposition 10.14 Für eine Möbiustransformation μ gilt:

- (a) $\mu(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn $\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist für $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$;
- (b) $\mu(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ genau dann, wenn $\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist für $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$;
- (c) $\mu(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ und $\mu(i) = i$ genau dann, wenn $\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist für $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$;
- (d) $\mu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ genau dann, wenn $\mu(z) = \zeta \cdot \frac{z+u}{\bar{u}z+1}$ ist für $\zeta \in S^1$ und $u \in \mathbb{D}$;
- (e) $\mu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und $\mu(0) = 0$ genau dann, wenn $\mu(z) = \zeta z$ ist für $\zeta \in S^1$.

Beweis. Die Teile (a–c) lassen wir als Übungsaufgabe. Weil wir die restlichen Teile im folgenden Kapitel benötigen, führen wir ihre Beweise aus.

Zunächst zeigen wir (e). Sei μ gegeben durch die Formel $\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ für $M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Dann ist $\mu(0) = 0$ äquivalent zu $b = 0$. Dies erfordert $d \neq 0$; nach Ersetzen von M durch $\frac{1}{d} \cdot M$ hat die Möbiustransformation also die Gestalt $\mu(z) = \frac{az}{cz+1}$. Sodann beachte, dass jede Möbiustransformation überall dort auf \mathbb{C} , wo sie nicht den Wert ∞ annimmt, eine stetige Funktion darstellt. Wenn sie also die Kreisscheibe \mathbb{D} bijektiv auf sich abbildet, so muss sie auch deren Abschluss bijektiv auf sich abbilden. Somit bildet sie auch deren Rand S^1 bijektiv auf sich ab. Für jedes $z \in S^1$ gilt also $|\frac{az}{cz+1}| = 1$ oder äquivalent $|cz+1| = |az|$. Wegen $|z| = 1$ ist aber die rechte Seite konstant gleich $|a|$. Man sieht schnell, dass $|cz+1|$ für $z \in S^1$ konstant ist genau dann, wenn $c = 0$ ist. Folglich ist jetzt $\mu(S^1) = S^1$ äquivalent zu $c = 0$ und $|a| = 1$. Insgesamt sind also beide Bedingungen zusammen äquivalent zu $\mu(z) = az$ mit $|a| = 1$, wie zu zeigen war.

Für die Implikation „ \Leftarrow “ in (d) betrachte eine Möbiustransformation $\mu(z) = \zeta \cdot \frac{z+u}{\bar{u}z+1}$ mit $\zeta \in S^1$ und $u \in \mathbb{D}$. Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ ist dann $|\mu(z)| = |\frac{z+u}{\bar{u}z+1}| < 1$ äquivalent zu $\bar{u}z+1 \neq 0$ und $|z+u| < |\bar{u}z+1|$. Nach Quadrieren ist die letztere Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{array}{ccc} (z+u)(\bar{z}+\bar{u}) & = & |z+u|^2 < |\bar{u}z+1|^2 = (\bar{u}z+1)(u\bar{z}+1) \\ \parallel & & \parallel \\ z\bar{z} + u\bar{z} + z\bar{u} + u\bar{u} & & \bar{u}uz\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{z} + 1, \end{array}$$

nachdem wir alles auf eine Seite bringen also zu

$$(1 - |z|^2)(1 - |u|^2) = (1 - z\bar{z})(1 - u\bar{u}) = 1 + \bar{u}uz\bar{z} - z\bar{z} - u\bar{u} > 0.$$

Wegen $|u| < 1$ ist dies äquivalent zu $|z| < 1$, anders gesagt zu $z \in \mathbb{D}$. Folglich gilt $\mu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, wie gewünscht.

Für die Implikation „ \Rightarrow “ in (d) sei μ irgendeine Möbiustransformation mit $\mu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Dann ist $u := -\mu^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, und nach der bereits bewiesenen Richtung ist $\nu(z) := \frac{z+u}{\bar{u}z+1}$ eine Möbiustransformation mit $\nu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Für diese gilt ausserdem $\nu(-u) = 0$ und somit $\nu^{-1}(0) = -u = \mu^{-1}(0)$ und daher $\mu(\nu^{-1}(0)) = 0$. Also ist $\lambda := \mu \circ \nu^{-1}$ eine Möbiustransformation mit $\lambda(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und $\lambda(0) = 0$. Nach (e) ist daher $\lambda(z) = \zeta z$ für ein $\zeta \in S^1$. Daraus folgt schliesslich $\mu(z) = \lambda(\nu(z)) = \zeta \cdot \frac{z+u}{\bar{u}z+1}$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 10.15 Eine weitere wichtige Eigenschaft von Möbiustransformationen und der Inversion ist ihre *Winkeltreue*, das heisst: Jeder Winkel α ist kongruent zu seinem Bild $\mu(\alpha)$. Falls μ allerdings keine affin-lineare Transformation ist, so ist das Bild eines Strahls nicht notwendigerweise ein Strahl, sondern möglicherweise ein Kreisabschnitt, und darum ist $\mu(\alpha)$ im allgemeinen ein „krummliniger“ Winkel.

Allgemein definieren je zwei reguläre C^1 -Kurven mit demselben Anfangspunkt und verschiedenen Tangenten einen krummlinigen Winkel. Die Bezeichnung „krummlinig“ soll dabei nur ausdrücken, dass die Kurven krumm sein dürfen, aber nicht müssen. Einen krummlinigen Winkel sieht man als kongruent zu demjenigen geraden Winkel an, der durch die Strahlen in die entsprechenden Tangentenrichtungen der beiden Kurven gebildet wird. Eine reguläre C^1 -Abbildung nennt man *winkeltreu*, wenn sie jeden krummlinigen Winkel auf einen dazu kongruenten krummlinigen Winkel abbildet. In diesem Sinn ist jede Möbiustransformation *winkeltreu*.

Allgemein nennt man *winkeltreue* Abbildungen auch *konform*, weil gewissermassen die Form jeder eingezeichneten Figur im Kleinen erhalten bleibt, auch wenn sich im Grossen die Proportionen ändern können. Die Theorie der konformen Abbildungen einer komplexen Variablen ist im wesentlichen identisch mit der Theorie holomorpher Funktionen, die den Gegenstand der Funktionentheorie darstellt.

11 Die hyperbolische Ebene

Mit den im vorigen Kapitel hergeleiteten Eigenschaften von Möbiustransformationen können wir nun relativ schnell das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene konstruieren. Wir realisieren es als Teilmenge von \mathbb{C} , wobei wir den Begriffen Gerade, Strecke, Strahl, Winkel, Dreieck, usw. neue Bedeutungen verleihen, welche sich von den Bedeutungen in \mathbb{C} als euklidischer Ebene unterscheiden. Um die dadurch entstehende Verwirrung zu reduzieren, werden wir, wo nötig, explizit von Geraden usw. *in der hyperbolischen Ebene* oder *hyperbolischen Geraden* gegenüber solchen *in \mathbb{C}* sprechen.

Als Menge der Punkte wählen wir eine Seite eines verallgemeinerten Kreises in $\bar{\mathbb{C}}$ und definieren alles weitere so, dass es automatisch invariant ist unter allen Möbiustransformationen, welche diese Seite bijektiv auf sich abbilden. Die einfachsten Möglichkeiten sind das Innere des Einheitskreises \mathbb{D} und die obere Halbebene \mathbb{H} . Jeder dieser Fälle hat gewisse Vorteile gegenüber dem anderen; darum fällt die Wahl schwer. Alles, was man in dem einen Modell tut, lässt sich aber mittels der Möbiustransformation μ_0 von (10.12) auf das andere Modell übertragen und umgekehrt. Ich nehme im folgenden das beschränkte Modell \mathbb{D} , weil Drehsymmetrien darin besser erkennbar sind.

Das bedeutet aber keineswegs, dass die hyperbolische Ebene in sich genommen nur eine endliche Ausdehnung hätte. Man sollte sich vielmehr \mathbb{D} als eine künstlich in die Ebene projizierte Karte einer irgendwo existierenden abstrakten hyperbolischen Ebene vorstellen, analog zu der Landkarte eines Ausschnitts der Erdoberfläche. Die Projektion führt notgedrungen zu Verzerrungen, das heisst, sie erhält weder Abstände, noch bildet sie gerade Strecken auf gerade Strecken ab. Konkret ähnelt das beschränkte Modell \mathbb{D} der hyperbolischen Ebene dem Bild, das entsteht, wenn man mit einem Fischauge-Objektiv auf eine unendlich ausgedehnte Ebene blickt.

Sei G die Gruppe aller Möbiustransformationen μ mit $\mu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Sei $g_0 := \mathbb{D} \cap \bar{\mathbb{R}}$, also das offene Intervall $] -1, 1[$.

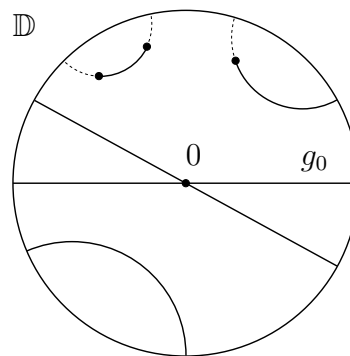
Definition 11.1 *Im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene gilt:*

- (a) *die Menge der Punkte ist \mathbb{D} ;*
- (b) *die Geraden sind die Teilmengen $\mu(g_0)$ für alle $\mu \in G$;*
- (c) *$A * B * C$ genau dann, wenn $\mu \in G$ und $a, b, c \in g_0$ existieren mit $a < b < c$ und $A = \mu(a)$ und $B = \mu(b)$ und $C = \mu(c)$;*
- (d) *$AB \cong A'B'$ genau dann, wenn $\mu \in G$ existiert mit $\mu(AB) = A'B'$; sowie*
- (e) *$\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ genau dann, wenn $\mu \in G$ existiert mit $\mu(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle B'A'C'$.*

Bemerkung 11.2 Die Geraden in \mathbb{D} sind also genau die Teilmengen $\mu(g_0) = \mu(\mathbb{D} \cap \bar{\mathbb{R}}) = \mathbb{D} \cap \mu(\bar{\mathbb{R}})$ für alle $\mu \in G$. Nach Proposition 10.4 ist dabei $K := \mu(\bar{\mathbb{R}})$ ein verallgemeinerter Kreis. Wegen $K \cap S^1 = \mu(\bar{\mathbb{R}}) \cap \mu(S^1) = \mu(\bar{\mathbb{R}} \cap S^1) = \mu(\{\pm 1\})$ schneidet dieser den Einheitskreis in genau zwei verschiedenen Punkten. Ausserdem schneiden sich die Kurven, genau wie \mathbb{R} und S^1 , orthogonal im Sinn von Bemerkung 10.15. Es stellt sich heraus, dass jeder verallgemeinerte Kreis $K \subset \bar{\mathbb{C}}$, welcher S^1 in genau zwei Punkten

orthogonal schneidet, auf diese Weise möglich ist. Die Geraden in \mathbb{D} sind also genau die Segmente $\mathbb{D} \cap K$ für alle verallgemeinerten Kreise $K \subset \mathbb{C}$, welche S^1 in genau zwei verschiedenen Punkten orthogonal schneiden. (Dieses Resultat werden wir aber in den folgenden Beweisen nicht verwenden.)

Die Relation des Dazwischenliegens auf einem solchen Segment entspricht der üblichen Anschauung. Strecken in \mathbb{D} sind also abgeschlossene Segmente von verallgemeinerten Kreisen mit den oben genannten Eigenschaften, welche ganz in \mathbb{D} liegen. Strahlen in \mathbb{D} sind halb-abgeschlossene Segmente derselben verallgemeinerten Kreise, die sich von einem Punkt in \mathbb{D} ausgehend in eine Richtung bis an den Rand S^1 erstrecken. Die nebenstehende Abbildung zeigt beispielhaft drei Geraden, einen Strahl und eine Strecke.



Strecken oder Winkel in \mathbb{D} sind kongruent genau dann, wenn sie unter einem $\mu \in G$ ineinander übergehen. Nach Konstruktion sind somit alle Begriffe invariant unter der Operation von G . Dieser Umstand wird das Verifizieren der Axiome enorm erleichtern. Genauer betrachte die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, $\infty \mapsto \infty$.

Lemma 11.3 Die Menge $\tilde{G} := \{\mu, \mu \circ \kappa \mid \mu \in G\}$ ist eine Gruppe unter Komposition. Jedes Element von \tilde{G} induziert eine Bewegung von \mathbb{D} .

Beweis. Für jede Möbiustransformation $\nu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt

$$\kappa(\nu(z)) = \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} = \bar{\nu}(\bar{z}) = \bar{\nu}(\kappa(z))$$

für die Möbiustransformation $\bar{\nu}(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}$. Ausserdem ist $\kappa \circ \kappa = \text{id}$. Folglich gilt für je zwei $\mu, \nu \in G$

$$\begin{aligned} \mu \circ \nu &\in \tilde{G}, \\ \mu \circ (\nu \circ \kappa) &= (\mu \circ \nu) \circ \kappa \in \tilde{G}, \\ (\mu \circ \kappa) \circ \nu &= (\mu \circ \bar{\nu}) \circ \kappa \in \tilde{G}, \\ (\mu \circ \kappa) \circ (\nu \circ \kappa) &= (\mu \circ \bar{\nu}) \circ (\kappa \circ \kappa) = \mu \circ \bar{\nu} \in \tilde{G}, \text{ sowie} \\ (\nu \circ \kappa)^{-1} &= \kappa^{-1} \circ \nu^{-1} = \kappa \circ \nu^{-1} = \bar{\nu}^{-1} \circ \kappa \in \tilde{G}. \end{aligned}$$

Somit ist \tilde{G} eine Gruppe, und die erste Aussage ist gezeigt.

Für die zweite Aussage betrachte ein beliebiges $\mu \in G$. Nach Konstruktion gilt dann $\mu(\kappa(\mathbb{D})) = \mu(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, also induzieren μ und $\mu \circ \kappa$ bijektive Abbildungen $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Betrachte sodann eine beliebige Gerade $g = \nu(g_0)$ für $\nu \in G$ gemäss Definition 11.1 (b). Dann ist $\mu(g) = \mu(\nu(g_0))$ wieder eine Gerade wegen $\mu \circ \nu \in G$, und so ist $(\mu \circ \kappa)(g) = \mu(\kappa(\nu(g_0))) = \mu(\bar{\nu}(\kappa(g_0))) = \mu(\bar{\nu}(g_0))$ wegen $\mu \circ \bar{\nu} \in G$. Weiter betrachte eine beliebige

Strecke AB in \mathbb{D} . Dann gilt $AB \cong \mu(AB)$ schon direkt nach Definition 11.1 (d). Da die Strecke in einer Geraden enthalten ist, haben wir $AB = \nu(ab)$ für ein $\nu \in G$ und eine Strecke $ab \subset g_0$. Dann folgt $(\mu \circ \kappa)(AB) = \mu(\kappa(\nu(ab))) = \mu(\bar{\nu}(\kappa(ab))) = \mu(\bar{\nu}(ab)) = \mu(\bar{\nu}(\nu^{-1}(AB)))$ mit $\mu \circ \bar{\nu} \circ \nu^{-1} \in G$; aus Definition 11.1 (d) folgt daher $AB \cong (\mu \circ \kappa)(AB)$. Damit erfüllen μ und $\mu \circ \kappa$ die Bedingungen (a), (b), (d) von Definition 8.1. Die übrigen Bedingungen in 8.1 verifiziert man analog. \square

Satz 11.4 *Im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene gelten alle Hilbert-Axiome ausser dem Parallelenaxiom (P), welches nicht gilt.*

Beweis. Da alles unter der Operation von G invariant ist, können wir wegen Proposition 10.7 in jedem Axiom, das einen gegebenen Punkt A betrifft, oBdA annehmen, dass $A = 0$ ist. Nach Anwendung einer Drehung wie in Proposition 10.14 (e) können wir dann ausserdem annehmen, dass ein von A verschiedener gegebener Punkt B auf dem Intervall $]0, 1[$ liegt. Genauso können wir in jedem Axiom, das eine Gerade g in \mathbb{D} betrifft, statt dieser Bedingungen oBdA annehmen, dass $g = g_0$ ist. Wenn zusätzlich noch ein Punkt $A \in g$ gegeben ist, wählen wir irgendeinen Punkt $B \in g \setminus \{A\}$ und reduzieren uns auf den Fall $A = 0$ und $B \in]0, 1[$. Dann ist nämlich g eine Gerade in \mathbb{D} durch 0 und B und nach dem folgenden Lemma somit gleich g_0 .

Lemma 11.5 *Für $B \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}B = \{tB \mid t \in \mathbb{R} \wedge |tB| < 1\}$ die eindeutige Gerade in \mathbb{D} durch 0 und B .*

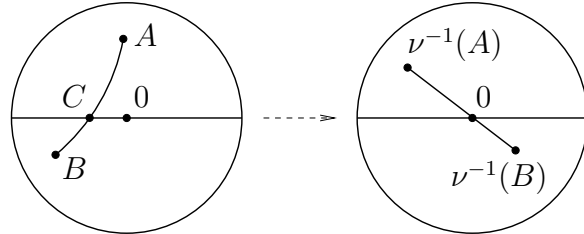
Beweis. Nach einer Drehung um 0 können wir oBdA $B \in]0, 1[$ annehmen. Dann ist g_0 eine Gerade in \mathbb{D} durch 0 und B . Sei $g = \mu(g_0)$ mit $\mu \in G$ eine weitere. Dann ist $u := \mu^{-1}(0)$ ein Punkt in g_0 , und nach Proposition 10.14 (d) liegt die Möbiustransformation $\nu(z) = \frac{z+u}{\bar{u}z+1}$ in G . Nach Konstruktion gilt nun $\nu(0) = u = \mu^{-1}(0)$ und somit $\mu(\nu(0)) = 0$. Nach Proposition 10.14 (e) ist daher $\mu \circ \nu$ eine Drehung um 0. Da ν reelle Koeffizienten hat, gilt andererseits $\nu(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ und somit $\nu(g_0) = g_0$. Also ist $g = \mu(g_0) = \mu(\nu(g_0))$. Da $\mu \circ \nu$ eine Drehung ist, ist also g der Durchschnitt von \mathbb{D} mit einer Geraden in \mathbb{C} . Wegen $0, B \in g$ bleibt dann nur der Fall $g = \mathbb{D} \cap \mathbb{R} = g_0$, was zu zeigen war. \square

Gehen wir jetzt die Hilbert-Axiome im einzelnen durch. Für das Inzidenzaxiom (I1) sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A = 0$; die Aussage folgt dann direkt aus Lemma 11.5. Das Inzidenzaxiom (I2) ist offensichtlich wegen $|g_0| = \infty$ und der Bijektivität von μ . Für das Inzidenzaxiom (I3) ist g_0 nach Lemma 11.5 die eindeutige Gerade durch die Punkte 0 und $1/2$, und sie enthält nicht $i/2$; diese drei Punkte erfüllen somit die Bedingungen von (I3).

In den Lageaxiomen (L1–3) können wir oBdA annehmen, dass zwei der gegebenen Punkte auf g_0 liegen und einer gleich 0 ist. Nach Lemma 11.5 liegt dann auch der dritte gegebene oder gesuchte Punkt auf g_0 , und die Axiome folgen direkt aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften in \mathbb{R} . Genauso führt man die Stetigkeitsaxiome (S1–2) auf die entsprechenden Aussagen in \mathbb{R} zurück. In dem Lageaxiom (L4) sei oBdA $g = g_0$; die Aussage ist dann eine direkte Konsequenz des folgenden Lemmas:

Lemma 11.6 Für $A, B \in \mathbb{D} \setminus g_0$ gilt $\exists C \in g_0 : A * C * B$ in \mathbb{D} genau dann, wenn einer der Punkte A, B oberhalb und der andere unterhalb der reellen Achse liegt.

Beweis. Für die Implikation „ \Rightarrow “ sei $C \in g_0$ ein Punkt mit $A * C * B$. Nach Proposition 10.14 (d) ist dann $\nu(z) := \frac{z+C}{\bar{C}z+1}$ eine Möbiustransformation in G . Da sie reelle Koeffizienten hat, bildet sie \mathbb{R} und somit auch g_0 bijektiv auf sich ab. Darum bildet sie entweder jede Seite von g_0 in \mathbb{D}



auf sich oder jede Seite auf die dazu entgegengesetzte Seite ab. Nach Konstruktion ist weiter $\nu(0) = C$ und somit $\nu^{-1}(C) = 0$. Nach Lemma 11.3 gilt also $\nu^{-1}(A) * 0 * \nu^{-1}(B)$. Nach Lemma 11.5 liegen die Punkte $\nu^{-1}(A)$ und $\nu^{-1}(B)$ also auf einer Geraden durch 0, und zwar auf entgegengesetzten Seiten von 0. Da sie ausserdem nicht in \mathbb{R} liegen, müssen sie auf entgegengesetzten Seiten von \mathbb{R} liegen. Dasselbe folgt dann auch für A und B , was zu zeigen war.

Für die Implikation „ \Leftarrow “ seien A und B auf entgegengesetzten Seiten von \mathbb{R} . Sei $\mu(g_0)$ mit $\mu \in G$ die nach (I1) eindeutige Gerade durch A und B . Dann sind $a := \mu^{-1}(A)$ und $b := \mu^{-1}(B)$ zwei verschiedene Elemente von $g_0 =]-1, 1[$. Nach etwaigem Ersetzen von $\mu(z)$ durch $\mu(-z)$ können wir oBdA annehmen, dass $a < b$ ist. Betrachte dann die stetige Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Im}(\mu(t))$. Ihre Werte bei a und b sind genau die Imaginärteile von A und B , haben also nach Voraussetzung verschiedene Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $c \in]a, b[$ mit $\text{Im}(\mu(c)) = 0$. Nach Definition 11.1 (c) ist daher $C := \mu(c)$ ein Punkt mit $A * C * B$, wie gewünscht. \square

Lemma 11.6 zeigt ausserdem, dass die beiden Seiten von g_0 in \mathbb{D} genau die Durchschnitte von \mathbb{D} mit der oberen bzw. unteren offenen Halbebene sind.

In dem Kongruenzaxiom (K1) können wir oBdA annehmen, dass $A = 0$ und $B \in]0, 1[$ sowie $A' = 0$ und $C' \in]0, 1[$ sind. Aus Lemma 11.5 folgt dann $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} = [0, 1[$. Nach Proposition 10.14 (e) ist jedes $\mu \in G$ mit $\mu(A) = A'$ eine Drehung um 0, und die einzige Drehung, welche $]0, 1[$ auf sich abbildet, ist die Identität. Also ist $\mu = \text{id}$ das einzige Element von G mit $\mu(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'C'}$. Somit ist $B' := \text{id}(B) = B$ der eindeutige Punkt in $\overrightarrow{A'C'}$ mit $AB \cong A'B'$, und (K1) ist gezeigt.

Für das Kongruenzaxiom (K2) seien AB und $A'B'$ und $A''B''$ beliebige Strecken in \mathbb{D} . Dann ist $\text{id}(AB) = AB$ für die identische Abbildung $\text{id} \in G$, also gilt $AB \cong AB$, und die Relation ist reflexiv. Ist $AB \cong A'B'$, so existiert nach Definition ein $\mu \in G$ mit $\mu(AB) = A'B'$; dann gilt $\mu^{-1}(A'B') = AB$ mit $\mu^{-1} \in G$ und somit $A'B' \cong AB$; also ist die Relation symmetrisch. Gilt schliesslich $AB \cong A'B'$ und $A'B' \cong A''B''$, so existieren $\mu, \mu' \in G$ mit $\mu(AB) = A'B'$ und $\mu'(A'B') = A''B''$; daraus folgt $\mu'(\mu(AB)) = A''B''$ mit $\mu' \circ \mu \in G$ und somit $AB \cong A''B''$; also ist die Relation transitiv. Insgesamt ist die Relation \cong daher eine Äquivalenzrelation, was zu zeigen war.

In dem Kongruenzaxiom (K3) können wir oBdA annehmen, dass $B = 0$ und $C \in]0, 1[$

ist. Nach der Definition der Relation $A * B * C$ und Lemma 11.5 ist dann $A \in]-1, 0[$. Unabhängig davon können wir entsprechend $B' = 0$ und $C' \in]0, 1[$ und $A' \in]-1, 0[$ voraussetzen. Dann gilt $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} =]0, 1[$ und $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'} =]-1, 0[$. Nach (K1) folgt aus $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ daher $A = A'$ und $C = C'$. Insbesondere ist dann $AC = A'C'$ und nach (K2) somit $AC \cong A'C'$, was zu zeigen war.

Analog können wir uns in (K4) auf den Fall $A = A' = 0$ und $C, C' \in]0, 1[$ reduzieren. Wegen Lemma 11.3 dürfen wir nach etwaigem Anwenden der komplexen Konjugation weiter annehmen, dass B und D' in der oberen Halbebene, d.h. in $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ liegen. Das Axiom erfordert dann einen eindeutigen Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $B' \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ und $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$. Nach Definition bedeutet letzteres, dass $\mu(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle B'A'C'$ ist für ein $\mu \in G$. Mit anderen Worten muss μ die beiden Schenkel von $\sphericalangle BAC$ auf die beiden Schenkel von $\sphericalangle B'A'C'$ abbilden; damit ist jedoch noch nicht gesagt, welcher Schenkel auf welchen Schenkel geht. Wegen $A = A' = 0$ und Proposition 10.14 (e) muss μ aber eine Drehung um den Nullpunkt sein. Da B und B' beide in der oberen Halbebene liegen und $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} =]0, 1[$ ist, lässt dies nur noch den Fall $\mu(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$ übrig. Als Drehung muss μ dann aber die identische Abbildung sein. Die einzige mögliche Wahl für den Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ ist somit \overrightarrow{AB} , und die Aussage von (K4) ist bewiesen.

Der Beweis von Axiom (K5) geht genau wie der von (K2).

In (K6) reduzieren wir uns mit denselben Argumenten wie oben auf den Fall $B = B' = 0$ und $C, C' \in]0, 1[$ und $A, A' \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Aus $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ folgern wir dann wie oben $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$. Aus $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ folgt dann mit (K1) schon $A = A'$ und $C = C'$. Also sind die beiden Dreiecke punktweise gleich und darum natürlich kongruent, was zu zeigen war.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass das Parallelenaxiom verletzt ist. Dies resultiert aus der folgenden allgemeineren Proposition. □

Proposition 11.7 *Für jede Gerade g und jeden Punkt $A \notin g$ existieren unendlich viele Geraden durch A , welche g nicht schneiden.*

Beweis. Sei B der Fusspunkt des Lots von A auf g gemäss Proposition 4.13 (welche nicht auf dem Parallelenaxiom beruht). Nach Anwenden eines geeigneten Elements von G können wir dann oBdA $B = 0$ und $g = g_0$ annehmen. Dann liegt A auf der eindeutigen hyperbolischen Gerade durch 0, welche dort mit g_0 im hyperbolischen Sinn einen rechten Winkel bildet. Nach Lemma 11.5 ist diese Gerade gleich $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}A$. Vorsicht: Wir wissen in diesem Moment noch nicht, ob der rechte Winkel im hyperbolischen Sinn auch ein rechter Winkel im euklidischen Sinn ist. Wir wissen aber aufgrund der Eindeutigkeit des hyperbolischen rechten Winkels, das heisst aufgrund von Proposition 4.12 und Axiom (K4), dass die Gerade $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}A$ unter jeder Bewegung von \mathbb{D} , welche 0 und g_0 in sich abbildet, invariant ist. Insbesondere ist sie also invariant unter der Transformation $z \mapsto -\bar{z}$, einer Spiegelung an der imaginären Achse $\mathbb{R}i$, und muss daher gleich $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}i$ sein. Nach etwaiger Anwendung der komplexen Konjugation κ können wir oBdA annehmen, dass $A = it$ mit $t \in]0, 1[$ ist.

Nach Proposition 10.14 (d) ist dann $\mu : z \mapsto \frac{z+it}{-itz+1}$ eine Möbiustransformation in G mit $\mu(0) = A$. Wir erhalten daher alle hyperbolischen Geraden durch A als Bilder unter μ von allen hyperbolischen Geraden durch 0. Nach Lemma 11.5 sind die letzteren genau die Mengen ζg_0 für alle $\zeta \in S^1$. Die Geraden durch $A = it$ sind somit genau die Mengen

$$g_\zeta := \left\{ \frac{\zeta z + it}{-it\zeta z + 1} \mid z \in g_0 \right\}$$

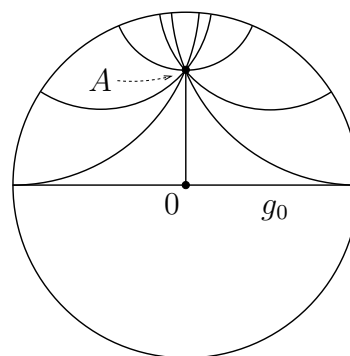
für alle $\zeta \in S^1$. Eine direkte Rechnung zeigt, dass für beliebiges $z \in g_0$ gilt

$$\frac{\zeta z + it}{-it\zeta z + 1} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(\zeta) \cdot \frac{2z}{1+z^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Das Bild der Abbildung $g_0 =]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \frac{2z}{1+z^2}$ ist aber genau das Intervall $] -1, 1[$. Folglich existiert ein $z \in g_0$, welches die obige Gleichung erfüllt, genau dann, wenn $|\operatorname{Im}(\zeta)| > \frac{2t}{1+t^2}$ ist. Umgekehrt folgt also

$$g_\zeta \cap g_0 = \emptyset \iff |\operatorname{Im}(\zeta)| \leq \frac{2t}{1+t^2}.$$

Wegen $\frac{2t}{1+t^2} > 0$ gibt es also eine unendliche Schar von zu g_0 parallelen Geraden durch $A = it$. In nebenstehender Abbildung sind einige dargestellt.



Proposition 11.8 Die Operation von \tilde{G} auf \mathbb{D} induziert einen Isomorphismus von \tilde{G} auf die Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene.

Beweis. Nach Lemma 11.3 liefert dies einen Homomorphismus. Liegt $\mu \in G$ in seinem Kern, so bildet μ jeden Punkt in \mathbb{D} auf sich ab, und nach Proposition 9.3 muss dann $\mu = \operatorname{id}$ sein. Liegt $\mu \circ \kappa$ für $\mu \in G$ in seinem Kern, so bilden $\mu \circ \kappa$ und κ , und somit auch μ jeden Punkt in g_0 auf sich ab; nach Proposition 9.3 muss dann ebenfalls $\mu = \operatorname{id}$ sein. Dann ist aber $\mu \circ \kappa = \kappa$ nicht die Identität auf \mathbb{D} und liegt somit doch nicht im Kern. Insgesamt zeigt dies, dass der Homomorphismus trivialen Kern hat und daher injektiv ist.

Sei nun φ irgendeine Bewegung der hyperbolischen Ebene \mathbb{D} . Setze $A := 0$ und $B := 1/2$. Dann sind $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ verschiedene Punkte von \mathbb{D} , nach den Bemerkungen am Anfang des Beweises von Satz 11.4 existiert daher ein $\mu \in G$ mit $\mu(\varphi(A)) = 0$ und $\mu(\varphi(B)) \in]0, 1[$. Da $\mu \circ \varphi$ eine Bewegung ist, folgt daraus $\mu(\varphi(\overrightarrow{AB})) = [0, 1[= \overrightarrow{AB}$.

Weiter liegt $C := i/2$ nicht auf der Geraden g_0 durch A und B , darum liegt $\mu(\varphi(C))$ nicht auf der Geraden durch $\mu(\varphi(A))$ und $\mu(\varphi(B))$, also ebenfalls nicht auf g_0 . Wenn $\mu(\varphi(C))$ und C schon auf derselben Seite von g_0 liegen, so sind demnach sowohl $\mu \circ \varphi$ als auch die Identität Bewegungen von \mathbb{D} , welche den Strahl \overrightarrow{AB} auf sich und den Punkt C auf einen Punkt auf derselben Seite von C abbilden. Aufgrund der Eindeutigkeit in Satz 8.2 gilt daher $\mu \circ \varphi = \operatorname{id}_{\mathbb{D}}$ und somit $\varphi = \mu^{-1}|_{\mathbb{D}}$. Andernfalls liegen $\kappa(\mu(\varphi(C)))$ und C auf derselben Seite von g_0 , weil κ die beiden Seiten von g_0 vertauscht. In diesem

Fall sind $\kappa \circ \mu \circ \varphi$ und die Identität Bewegungen von \mathbb{D} , welche den Strahl \overrightarrow{AB} auf sich und den Punkt C auf einen Punkt auf derselben Seite von C abbilden, und aus der Eindeutigkeit in Satz 8.2 folgt analog $\kappa \circ \mu \circ \varphi = \text{id}$ und somit $\varphi = \mu^{-1} \circ \kappa^{-1}|_{\mathbb{D}} = \mu^{-1} \circ \kappa|_{\mathbb{D}}$. In beiden Fällen ist φ durch ein Element von \tilde{G} repräsentiert, also ist die Abbildung surjektiv. Insgesamt ist sie somit ein Isomorphismus. \square

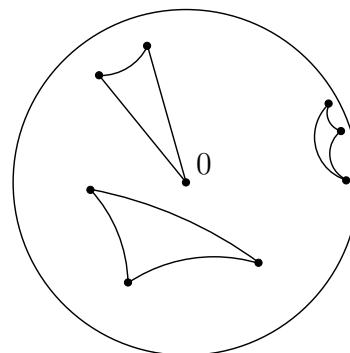
Bemerkung 11.9 Alle Resultate in Kapitel 8 von Satz 8.2 bis Proposition 8.15 gelten auch in der hyperbolischen Ebene, da sie nicht auf dem Parallelenaxiom beruhen. Insbesondere gibt es hyperbolische Drehungen und Spiegelungen. Die hyperbolischen Drehungen um 0 sind genau die Abbildungen $z \mapsto \zeta z$ für $\zeta \in S^1$, kommen also von Drehungen in der euklidischen Ebene \mathbb{C} her. Hyperbolische Drehungen um andere Punkte in \mathbb{D} haben dagegen eine kompliziertere Gestalt. Analog sind die hyperbolischen Spiegelungen an Geraden durch 0 genau die Abbildungen $z \mapsto \zeta \bar{z}$ für $\zeta \in S^1$; hyperbolische Spiegelungen an anderen hyperbolischen Geraden haben aber ebenfalls eine kompliziertere Gestalt. Beliebige hyperbolische Bewegungen kann man klassifizieren anhand der Koeffizienten der Formel $\frac{az+b}{cz+d}$, ähnlich wie in Proposition 8.18. Die Bewegungen ohne Fixpunkte haben aber andere Eigenschaften als im euklidischen Fall; insbesondere gibt es keine nicht-trivialen Translationen mit den gleichen Eigenschaften wie in Bemerkung 8.19.

Bemerkung 11.10 Ein numerisches Mass für die hyperbolische Länge einer hyperbolischen Strecke, welches unter Zusammensetzung additiv ist (vergleiche Kapitel 7), erhalten wir wie folgt. Jede Strecke in \mathbb{D} lässt sich durch ein $\mu \in G$ auf eine Strecke mit Endpunkten 0 und $t \in]0, 1[$ abbilden. Betrachte eine zweite Strecke mit Endpunkten 0 und $s \in]0, 1[$. Um diese hyperbolisch so zu verschieben, dass wir sie mit der ersten Strecke zusammensetzen können, brauchen wir ein $\mu \in G$ mit $\mu(0) = t$ und $\mu(s) \in]t, 1[$. Es stellt sich heraus, dass die Möbiustransformation aus Proposition 10.14 (d) mit $\zeta = 1$ und $u = t$, das heisst, die Abbildung $\mu : z \mapsto \frac{z+t}{tz+1}$ dies tut. Sie bildet die Punkte 0 und s auf die Punkte t und $\frac{s+t}{ts+1}$ ab; die zusammengesetzte Strecke hat also die Endpunkte 0 und $\frac{s+t}{ts+1}$. Ein additives numerisches Mass für die Länge der Strecke $0t$ muss daher eine Funktion $\ell :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \ell(t)$ sein mit der Eigenschaft $\ell\left(\frac{s+t}{ts+1}\right) = \ell(s) + \ell(t)$ für alle $s, t \in]0, 1[$. Diese Gleichung ähnelt sehr der Funktionalgleichung des hyperbolischen Tangens (nomen est omen), für den nämlich $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{\tanh x \cdot \tanh y + 1}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, wie man schnell nachrechnet. Seine Umkehrfunktion $\text{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt daher die Funktionalgleichung $\text{artanh}\left(\frac{s+t}{ts+1}\right) = \text{artanh } s + \text{artanh } t$ für alle $s, t \in]-1, 1[$, die genau die gewünschte Form besitzt. Also ist $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \text{artanh } t$ ein additives numerisches Mass für die Länge der hyperbolischen Strecke $0t$. Die Länge einer beliebigen hyperbolischen Strecke erhält man, indem man durch ein $\mu \in G$ die Endpunkte auf 0 und einen Punkt in $] -1, 1[$ abbildet und dann artanh anwendet.

Für $t \rightarrow 1$ geht $\text{artanh } t$, die hyperbolische Länge der Strecke $0t$, gegen ∞ . Also ist der Strahl $[0, 1]$, und aufgrund der Invarianz unter G auch jeder andere Strahl, im hyperbolischen Sinne unendlich lang. Dieses Ergebnis mag überraschen, aber es muss ja schon deshalb gelten, weil wir wie im archimedischen Axiom (S1) Kopien derselben

Strecke immer wieder aneinander ansetzen können und dadurch für jede Strecke einer gegebenen Länge auf demselben Strahl Strecken mit beliebigen Vielfachen dieser Länge konstruieren können. Die hyperbolischen Abstände von Punkten in \mathbb{D} können also beliebig gross werden, auch wenn die euklidischen Abstände in der „verzerrten Karte“ $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ beschränkt bleiben.

Bemerkung 11.11 Die Winkelsumme in jedem hyperbolischen Dreieck ist echt kleiner als der gestreckte Winkel. Anschaulich kann man das daran erkennen, dass die Kreissegmente, aus denen ein hyperbolisches Dreieck besteht, stets nach innen gewölbt sind; die Winkel an den Ecken sind dadurch kleiner als die Winkel des euklidischen Dreiecks mit denselben Ecken. Ausserdem kann die Winkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks beliebig klein werden, nämlich wenn die Ecken des Dreiecks gegen den Rand S^1 gehen. Einige hyperbolische Dreiecke sind in nebenstehender Abbildung dargestellt.



Bemerkung 11.12 In Proposition 5.9 waren eine Strecke AB und zwei Punkte D und E auf derselben Seite von \overline{AB} gegeben, und es ging um ein Kriterium dafür, dass die Strahlen \overrightarrow{AD} und \overrightarrow{BE} sich treffen. Das Resultat besagte, dass es unter Benutzung des Parallelenaxioms genügt, dass die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABE$ zusammen weniger als einen gestreckten Winkel ergeben. In der hyperbolischen Geometrie gilt dieses Kriterium nicht. Im Gegenteil, dort kann es auch bei beliebig kleinen Winkeln $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABE$ geschehen, dass die Strahlen \overrightarrow{AD} und \overrightarrow{BE} sich nicht treffen, sofern nur die Strecke AB genügend lang ist.

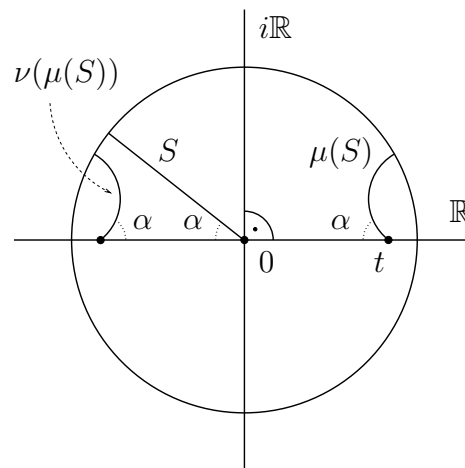
Betrachten wir zum Beispiel einen festen von 0 ausgehenden hyperbolischen Strahl, nach Lemma 11.5 also eine Teilmenge der Form $S = \{\zeta s \mid s \in [0, 1[\}$ mit $\zeta \in S^1$. Nehmen wir an, dass dieser mit dem Strahl $] -1, 0]$ einen Winkel α bildet, der kleiner als ein rechter Winkel ist, wofür $-1 < \operatorname{Re}(\zeta) < 0$ sein muss. Für jedes $t \in]0, 1[$ definiert $\mu(z) = \frac{z+t}{tz+1}$ nach Proposition 10.14 (d) eine Möbiustransformation in G . Diese bildet den Strahl $] -1, 0]$ auf den Strahl $] -1, t]$ ab; also ist $\mu(S) \cup] -1, t]$ ein hyperbolischer Winkel mit Scheitelpunkt t , der kongruent zu dem gegebenen Winkel α ist. Nach Konstruktion besteht $\mu(S)$ genau aus den Punkten $\frac{\zeta s+t}{t\zeta s+1}$ für alle $s \in [0, 1[$. Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\frac{\zeta s+t}{t\zeta s+1} \in \mathbb{R}i \iff -\operatorname{Re}(\zeta) \cdot \frac{2s}{1+s^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Das Bild der Abbildung $[0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{2s}{1+s^2}$ ist aber genau das Intervall $[0, 1[$. Folglich existiert ein $s \in [0, 1[$, welches die obige Gleichung erfüllt, genau dann, wenn $\operatorname{Re}(\zeta) < -\frac{2t}{1+t^2}$ ist. Umgekehrt folgt also

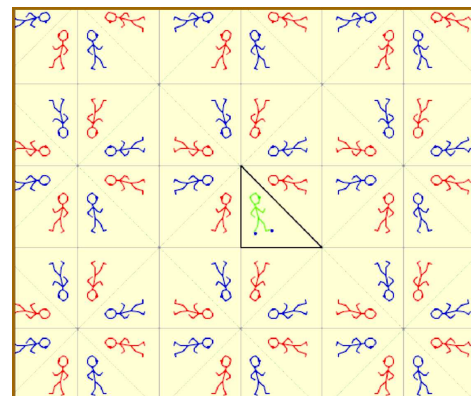
$$\mu(S) \cap \mathbb{R}i = \emptyset \iff \operatorname{Re}(\zeta) \geq -\frac{2t}{1+t^2}.$$

Da aber $\operatorname{Re}(\zeta) > -1$ ist und $\frac{2t}{1+t^2}$ gegen 1 geht für $t \rightarrow 1$, ist diese Ungleichung für alle t hinreichend nahe bei 1 erfüllt. Für solche t liegt der Strahl $\mu(S)$ also gänzlich rechts von der imaginären Achse. Dann treffen sich $\mu(S)$ und die imaginäre Achse nicht, obwohl die entsprechenden Winkel mit g_0 , nämlich ein rechter Winkel plus α , zusammen genommen weniger als einen gestreckten Winkel ergeben.

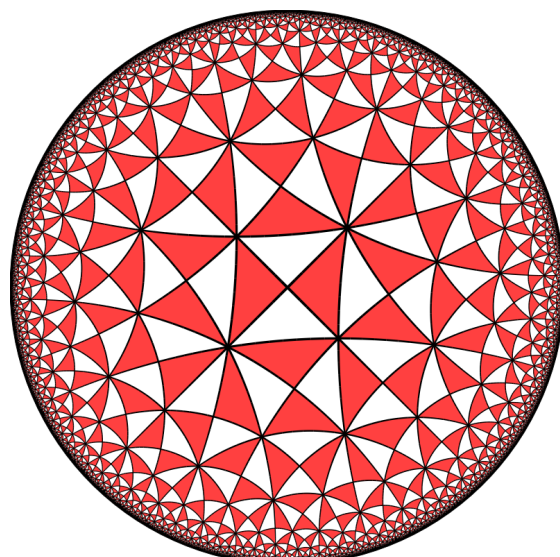


Schlimmer noch, wenn wir den Strahl $\mu(S)$ an der imaginären Achse spiegeln, das heißt, sein Bild unter $\nu(z) := -\bar{z}$ nehmen, so liegt das Resultat gänzlich links von der imaginären Achse und ist daher disjunkt zu $\mu(S)$. Somit haben wir zwei Strahlen $\mu(S)$ und $\nu(\mu(S))$, welche sich nicht treffen, obwohl die entsprechenden Winkel mit g_0 , nämlich jetzt zwei Kopien von α , zusammen weniger als einen gestreckten Winkel ergeben. Wie versprochen kann dabei 2α beliebig klein gewählt werden.

Bemerkung 11.13 Bekanntlich kann man jedes euklidische Dreieck durch ein dazu kongruentes Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzen und die euklidische Ebene mit Kopien dieses Parallelogramms pflastern, so dass sie ohne Überlappungen überdeckt wird. Für gewisse Dreiecke lässt sich eine solche Pflasterung auch durch wiederholtes Spiegeln an Dreiecksseiten erreichen, wie in nebenstehender Abbildung für ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$.



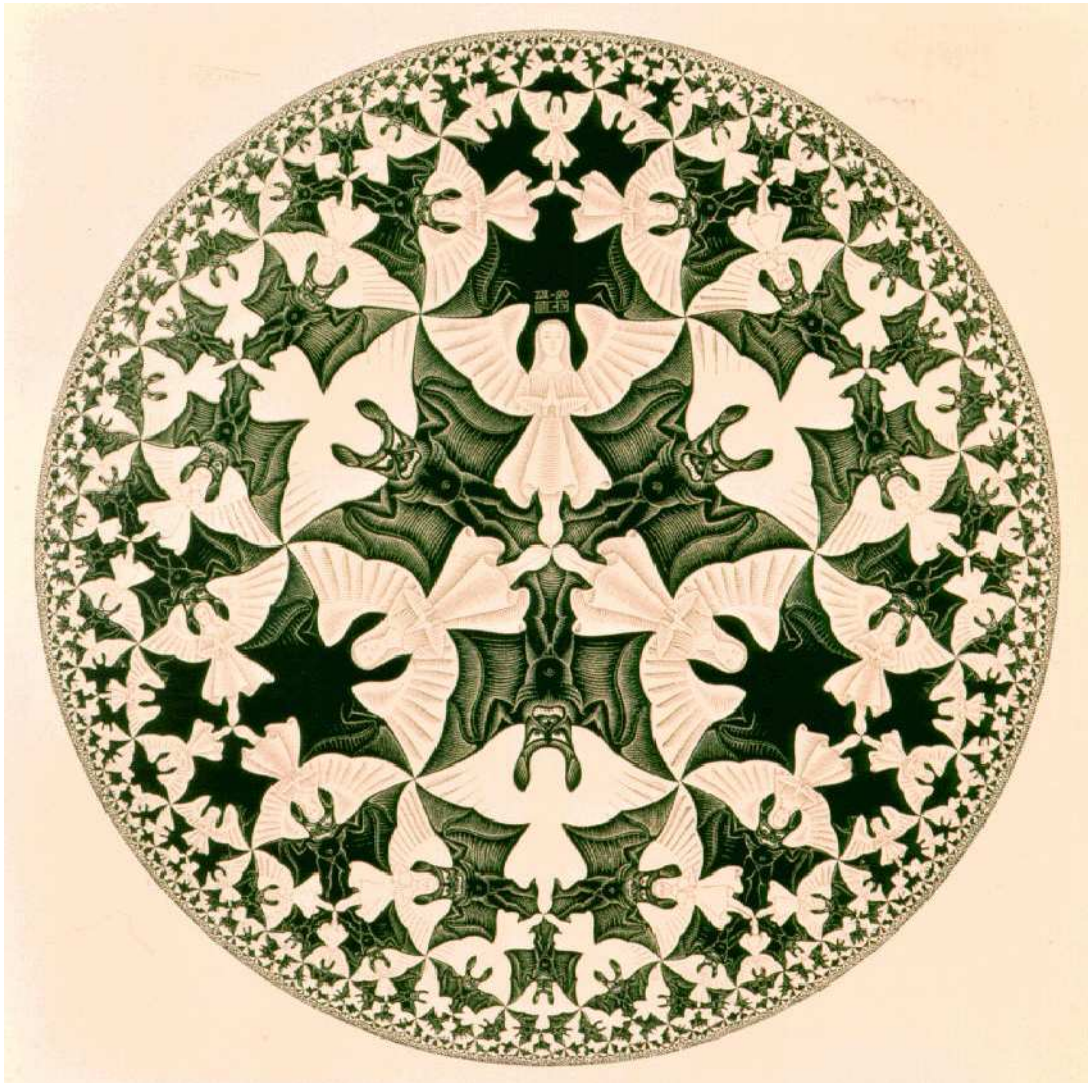
In der hyperbolischen Ebene können wir Analoges erreichen. Wir wählen dafür beliebige natürliche Zahlen $\ell, m, n > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. Dann existiert ein hyperbolisches Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{\ell}$ und $\frac{\pi}{m}$ und $\frac{\pi}{n}$, und es ist sogar bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt (ohne Beweis). Wir spiegeln dieses Dreieck an seinen Seiten, spiegeln die dadurch neu erhaltenen Dreiecke an deren Seiten und fahren so immer weiter fort. Insgesamt erhalten wir dadurch eine Pflasterung von \mathbb{D} durch kongruente



Dreiecke, welche ganz \mathbb{D} überdecken und sich nicht überlappen. Für $(\ell, m, n) = (2, 4, 5)$ sieht das Resultat aus wie in der obigen Abbildung. Siehe dafür auch:

http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_group

Auf dem gleichen Prinzip basierend hat der Künstler Maurits Escher viele schöne Grafiken erstellt, wie zum Beispiel diese:



Literatur

- [1] D. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 14. Auflage, Teubner, 1999
- [3] H. Knörrer, *Geometrie*, 2. Auflage, Vieweg, 2006

Das Buch [1] von Hartshorne behandelt den axiomatischen Aufbau der Geometrie in grossem Detail und geht insbesondere auf den Zusammenhang mit Euklids „Elementen“ ein. Der grössere Teil des Materials der Vorlesung ist von dort übernommen, insbesondere von §§6–21 und §37. Zur Vertiefung ist das Werk [1] sehr zu empfehlen. Allgemein empfehlenswert ist auch Hilberts Klassiker [2] sowie das Buch [3] von Knörrer, das viele weitere Aspekte der Geometrie behandelt.