Musterlösung zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (i) Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, ganze Funktion. Zeige, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganze Funktionen mit $f \circ g = 0$. Zeige, dass entweder g konstant ist oder $f = 0$.

Lösung. (i) Gäbe es $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$, dann fänden wir $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$. Mit anderen Worten würde gelten $|f(z) - z_0| \geq r$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Betrachte dann die Funktion

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0}.$$

Nach Wahl von z_0 ist diese Funktion wohldefiniert und analytisch mit

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - z_0|} \leq \frac{1}{r}.$$

Nach dem Satz von Liouville ist g also konstant und damit auch f. Dies ist ein Widerspruch zu den Annahmen.

(ii) Ist g nicht konstant, dann ist $g(\mathbb{C})$ nach dem vorigen Aufgabenteil dicht in $\mathbb{C}$. Es gilt aber

$$f(\mathbb{C}) = f(\overline{g(\mathbb{C})}) \subset \overline{f(g(\mathbb{C}))} = \overline{\{0\}} = \{0\}.$$

Also ist f konstant gleich 0.

Aufgabe 2. Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)}\, dt.$$

Lösung. Beachte, dass $\cos(u) = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$ gilt. Also haben wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(e^{3iu} + e^{-3iu})}{5 - 2(e^{iu} + e^{-iu})}\, dt.$$

Da ausserdem $e^{3iu} = (e^iu)^3$ und $e^{-iu} = 1/e^{iu}$ gilt, wollen wir wie bei Integralen von Typ IV aus der Vorlesung die Substitution $z = e^{iu}$ anwenden um das Integral oben in ein komplexes Integral über den Einheitskreis umzuwandeln. Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(e^{3iu} + e^{-3iu})}{5 - 2(e^{iu} + e^{-iu})}\, dt = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{(z^3 + 1/z^3)}{5 - 2(z + 1/z)} \frac{1}{iz}\, dt.$$

Die obige Gleichung folgt sofort nach der Definition der rechten Seite mit der Parametrisierung $\gamma(t) = e^{it}$ des Einheitskreises. Nun schreiben wir die rationale Funktion im Integrand um und bestimmen Polstellen und Residuen.

$$\frac{(z^3 + 1/z^3)}{(5 - 2(z + 1/z))z} = \frac{\frac{z^6+1}{z^3}}{5z - 2z^2 + -2} = \frac{z^6 + 1}{-2z^3(z - 1/2)(z - 2)}.$$

Wir sehen:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5-4\cos(t)}\,dt &= \pi\left(\mathrm{Res}(\frac{z^6+1}{-2z^3(z-1/2)(z-2)},0)+\mathrm{Res}(\frac{z^6+1}{-2z^3(z-1/2)(z-2)},\frac{1}{2})\right)\\ &= \pi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \frac{z^6+1}{-2(z-1/2)(z-2)}\Big|_{z=0} + \frac{(\frac{1}{2})^6+1}{-2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}-2)}\right)\\ &= \pi(-\frac{21}{8}+\frac{65}{24}) = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $\emptyset \neq W \subset U$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $f|W = 0$. Zeige, dass dann $f = 0$ auf ganz U.

Hinweis: Betrachte die Mengen

$$\begin{aligned}A &= \{z \in U\colon f(z) \neq 0 \text{ oder } z \text{ ist eine isolierte Nullstelle von } f\}\\ B &= \{z \in U\colon \text{es existiert eine Umgebung } z \in V \subset U \text{ offen mit } f|V = 0\}.\end{aligned}$$

Zeige, dass A und B offen sind und eine disjunkte Überdeckung von U bilden.

Lösung. Dieser Satz wird in jedem Funktionentheoriebuch bewiesen, zum Beispiel Th. 3.2 Freitag-Busam.

Aufgabe 4.

(i) Zeige das Minimumsprinzip: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Hat f ein lokales Betragsminimum in a, so ist notwendigerweise $f(a) = 0$.

(ii) Folgere hieraus den Fundamentalsatz der Algebra.

Lösung.

(i) Wäre $f(a) \neq 0$, dann gäbe es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $V \subset U$ von a so dass f auf V nirgends verschwindet. Also ist dort die Funktion $g = \frac{1}{f}$ definiert und analytisch. Da nach Voraussetzung $|f(z)| \geq |f(a)|$ für alle z in einer kleinen Umgebung von a, gilt

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{|f(a)|} = |g(a)|$$

in einer solchen Umgebung. Also hat g ein lokales Betragsmaximum und ist daher konstant auf V nach dem Maximumsprinzip. Daher ist auch $f = 1/g$ konstant auf V und da $V \subset U$ offen und U zusammenhängend ist, ist f auf ganz U konstant. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.

(ii) Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, das heisst $a_n \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass f auf $U = \mathbb{C}$ ein lokales Betragsminimum hat, also dort nach der vorigen Aufgabe eine Nullstelle hat. Hierzu wollen wir den Satz nutzen, dass die stetige Funktion $|f|$ auf einer kompakten Kreisscheibe $\overline{B}(0,R)$ ihr Minimum annimmt. Wir müssen nur erreichen, dass dies im Inneren der Scheibe geschieht. Doch nach der umgekehrten Dreiecksungleichung und der normalen Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \ldots |a_1||z| - |a_0|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist ein Polynom in $|z|$ mit positivem Leitkoeffizienten $|a_n|$, also geht sie gegen unendlich für $|z| \longrightarrow \infty$. Insbesondere finden wir ein $R > 0$ so dass für $|z| \geq R$ gilt $|f(z)| > |f(0)|$. Dann nimmt die Funktion $|f|$ ihr Minimum auf $\overline{B}(0, R)$ nicht auf dem Rand an, wo $|z| = R$, sondern im Inneren. Also hat f sogar eine Nullstelle in $U = B(0, R)$.

Aufgabe 5. (Lemma von Schwarz) Seien D die offene Einheitskreisscheibe und $f : D \longrightarrow D$ eine nichtkonstante analytische Abbildung, so dass $f(0) = 0$.

(a) Beweise, dass
  (i) $\forall z \in D \;\; |f(z)| \leq |z|$.
  (ii) $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (i) Es existiert $z_0 \in D \smallsetminus \{0\}$, sodass $|f(z_0)| = |z_0|$.
  (ii) $|f'(0)| = 1$.
  (iii) Es existiert $\vartheta \in \mathbb{R}$, sodass $f(z) = ze^{i\vartheta}$ für alle $z \in D$ gilt.

Hinweis: Betrachte die Abbildung $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ und verwende das Maximumprinzip.

Lösung. (a) Durch Betrachtung der Potenzreihenentwicklung von f sieht man, dass die Funktion $\tilde{g}(z) = \frac{f(z)}{z}$ eine analytische Fortsetzung g auf D mit $g(0) = f'(0)$ hat. Seien $0 < r < 1$ und $D_r = \{z : |z| < r\}$. Für $z \in \partial D_r$ gilt

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r},$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, dass $f(z) \in D$ für $z \in D$. Wegen dem Maximumprinzip gilt dasselbe auf ganz D_r. Es gilt sogar, dass $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$, für alle $z \in D$ und $0 < r < 1$ beliebig. In der Tat, wenn $z \in D_r$ ist, dann gilt die Ungleichung nach dem Argument oben; wenn $z \notin D_r$, dann existiert $R \in (r, 1)$, so dass $z \in D_R$ ist, also $|g(z)| \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{r}$). Im Limes $r \longrightarrow 1$ ergibt sich also $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Dies bedeutet
  (i) für $z \neq 0$, dass $|f(z)| \leq |z|$ ist [für $z = 0$ ist dies trivial], und
  (ii) für $z = 0$, dass $|f'(0)| \leq 1$ ist.

(b) Die Aussagen (i) und (ii) implizieren, dass es ein $z_0 \in D$, sodass $|g(z_0)| = 1$, und somit erreicht die Funktion g ihr Maximum. Das Maximumprinzip impliziert dann, dass g konstant ist. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ die komplexe Zahl, sodass $g \equiv \zeta$ ist. Da $|\zeta| = |g(z_0)| = 1$ ist, existiert $\vartheta \in \mathbb{R}$, so dass $\zeta = e^{i\vartheta}$, und (iii) folgt. Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (i), und (iii) $\Rightarrow$ (ii) sind offensichlich.

⋆ **Aufgabe 6.** Sei $f\colon B_1(0) \longrightarrow B_1(0)$ eine analytische Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe mit zwei Fixpunkten (Es gibt also $a, b \in B_1(0)$ mit $a \neq b$ und $f(a) = a$, $f(b) = b$). Zeige, dass $f(z) = z$ für alle $z \in B_1(0)$.

Hinweis: Lemma von Schwarz.

⋆ **Aufgabe 7.** Zeige, dass alle Automorphismen der (offenen) Einheitskreisscheibe D (das heisst alle analytischen Bijektionen $\phi\colon D \longrightarrow D$ mit analytischer Umkehrfunktion) von der Form

$$\phi(z) = \lambda \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

für $a \in D$ und $\lambda \in \partial D$ sind. (Hinweis: vorherige Aufgabe)