Musterlösung zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Integrale:

(i)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 2}$$

(ii)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4 + 6x^2 + 25}\,\mathrm{d}x$$

(iii)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2}\mathrm{d}x$$

Lösung. (i) Die Funktion
$$z \longrightarrow \frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{(z-(1+i))(z-(1-i))}$$
besitzt die zwei isolierten Singularitäten erster Ordnung $1+i$ und $1-i$. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-2z+2}$ konvergiert, denn die Differenz des Grades des Nenners und des Zählers (grösser oder) gleich zwei ist. Dann ist das Integral nach dem Residuensatz:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 2} = 2\pi i \,\mathrm{R}es\left(\frac{1}{z^2 - 2z + 2}, 1+i\right) = 2\pi i \frac{1}{(1+i)-(1-i)} = \pi.$$

(ii) Aus der Faktorisierung
$$z^4 + 6x^2 + 25 = (z^2 + 3 - 4i)(z^2 + 3 + 4i)$$
folgt, dass die Funktion $z \longmapsto (z-1)/(z^4 + 6z^2 + 25)$ vier isolierten Singularitäten erster Ordnung in $1-2i$, $-1+2i$, $1+2i$ und $-1-2i$ besitzt. Man bemerke, dass die ersten zwei komplexen Zahlen Wurzeln von $-3-4i$ und die letzten von $-3+4i$ sind. Dann ist
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4 + 6x^2 + 25}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left\{\mathrm{R}es\left(\frac{z-1}{z^4 + 6z^2 + 25}, 1+2i\right) + \mathrm{R}es\left(\frac{z-1}{z^4 + 6z^2 + 25}, -1+2i\right)\right\},$$
wobei die Konvergenz aus dem selben Kriterium für das Integral wie in (a) garantiert wird. Die Residuen können wir z.B. durch die Formel aus Aufgabe 3 (iii) unten berechnen:
$$\mathrm{R}es\left(\frac{z-1}{z^4 + 6z^2 + 25}, 1+2i\right) = \frac{(1+2i)-1}{4(1+2i)^3 + 12(1+2i)} = \frac{1-2i}{40}$$
und
$$\mathrm{R}es\left(\frac{z-1}{z^4 + 6z^2 + 25}, -1+2i\right) = \frac{(-1+2i)-1}{4(-1+2i)^3 + 12(-1+2i)} = \frac{3i-1}{40}.$$
Es ergibt sich daher:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4 + 6x^2 + 25}\,dx = 2\pi i \left\{\frac{1-2i}{40} + \frac{3i-1}{40}\right\} = -\frac{\pi}{20}.$$

(iii) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x,$$

und somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x\right).$$

Die Funktion $z \longmapsto \exp(iz)/(z^2-2z+2)$ besitzt die zwei isolierten Singularitäten erster Ordnung in $1+i$ und $1-i$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \ \mathrm{R}es\left(\frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}, 1+i\right) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i(1+i)}}{2(1+i)-2} = \pi e^{-1+i}.$$

Für das erste Integral hat man also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{R}e\left(\pi e^{-1+i}\right) = \frac{\pi\cos 1}{e}.$$

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in U$. Seien $f, g\colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Zeige folgende Formeln zur Berechnung von Residuen:

(i) Ist $\mathrm{ord}(f,a) \geq -1$, so gilt $\mathrm{Res(f,a)} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

(ii) Ist a ein Pol der Ordnung k von f, so gilt

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{h^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

mit $h(z) = (z-a)^k f(z)$.

(iii) Ist f holomorph an a und hat g eine einfache Nullstelle in a so gilt

$$\mathrm{Res}(f/g,a) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iv) Hat f in a einen Pol erster Ordnung und ist g analytisch in einer Umgebung von a, so gilt

$$\mathrm{Res}(fg,a) = g(a)\mathrm{Res}(f,a).$$

(v)

$$\mathrm{Res}(f',a) = 0$$

Lösung. Für alle folgenden Aufgaben seien die Laurentreihenentwicklungen von f, g bei a gegeben durch

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j(z-a)^j, g(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j(z-a)^j$$

Es gilt dann $b_j = 0$ für $j < \mathrm{ord}(f,a)$ und analog $c_j = 0$ für $j < \mathrm{ord}(g,a)$. Wir sehen auch $\mathrm{Res}(f,a) = b_{-1}$ und $\mathrm{Res}(g,a) = c_{-1}$.

(i) Wir verwenden $b_j = 0$ für $j < -1$ und berechnen

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\sum_{j=-1}^{\infty} b_j(z-a)^{j+1} = b_{-1} = \operatorname{Res}(f,a),$$

denn für $j \geq 0$ geht $(z-a)^{j+1}$ gegen 0.

(ii) Der Punkt a ist ein Pol der Ordnung k genau dann, wenn $b_j = 0$ für $j < -k$ und $b_{-k} \neq 0$. Wir berechnen also h zu

$$h(z) = (z-a)^k f(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} b_j(z-a)^{j+k} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m-k}(z-a)^m,$$

wobei wir eine Indexverschiebung $m = j+k$ vorgenommen haben. Also sehen wir, dass h eine hebbare Singularität bei a hat und genau durch die obige Potenzreihe gegeben ist. Dann wissen wir, dass

$$\frac{h^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = b_{(k-1)-k} = b_{-1} = \operatorname{Res}(f,a)$$

aus den bekannten Resultaten über die Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen.

(iii) Die Bedingung f holomorph bedeutet gerade $b_j = 0$ für $j < 0$ und dass g eine einfache Nullstelle hat, impliziert $c_j = 0$ für $j \leq 1$ und $c_1 = g'(a) \neq 0$. Um die Laurentreihenentwicklung von f/g zu berechnen, betrachten wir also

$$\frac{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots}{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots} = \frac{1}{z-a}\left(\frac{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots}{c_1 + c_2(z-a) + \ldots}\right)$$

Rechts in Klammern steht aber jetzt die holomorphe Funktion $h(z) = (z-a)f(z)/g(z)$, mit $h(a) = b_0/c_1 = f(a)/g'(a)$. Dann ist aber genau $h(a)$ das Residuum der rechten Seite, wie behauptet.

(iv) In diesem Fall sehen wir, dass $b_j = 0$ für $j < -1$ und $b_{-1} \neq 0$, sowie $c_j = 0$ für $j \leq -1$. Schreiben wir fg aus, ergibt sich nach der Formel des Cauchyprodukts

$$\begin{aligned}(fg)(z) &= (b_{-1}(z-a)^{-1} + b_0 + b_1(z-a) + \ldots)(c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots)\\ &= b_{-1}c_0(z-a)^{-1} + (b_{-1}c_1 + b_0c_0) + \ldots\end{aligned}$$

Wir sehen also

$$\operatorname{Res}(fg,a) = b_{-1}c_0 = \operatorname{Res}(f,a)g(a).$$

(v) Leiten wir die Laurentreihenentwicklung von f ab, erhalten wir

$$f'(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j j(z-a)^{j-1}.$$

Der Koeffizient vor $(z-a)^{-1}$ ist also gerade $b_0 \cdot 0 = \operatorname{Res}(f',a)$ wie behauptet.

Aufgabe 3.

(i) Sei $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit einem Pol der Ordnung $k \geq 1$ bei a. Dann gibt es für jedes $R > 0$ ein $r > 0$ mit

$$f(B(a,r) \setminus \{a\}) \subset B(0, R, \infty),$$

das heisst $|f(z)| > R$ für $|z - a| < r$.

(ii) Umgekehrt gibt es für jedes $r > 0$ mit $B(a,r) \subset U$ ein $R > 0$, so dass

$$B(0, R, \infty) \subset f(B(a,r) \setminus \{a\}),$$

das heisst alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > R$ sind Bilder von komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < r$.

(iii) Bestimme die Art der Singularität von $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$ in $z_0 = i$.

Lösung. (i) Sei im Folgenden der Einfachheit halber $a = 0$ (z.B. indem wir auf die Funktion $\tilde{f}(z) = f(z + a)$ übergehen). In der Laurentreihenentwicklung von f können wir die niedrigste Potenz von z ausklammern und erhalten

$$f(z) = a_{-k}z^{-k}+a_{-k+1}z^{-k+1}+a_{-k+2}z^{-k+2}+\ldots = z^{-k}\underbrace{(a_{-k} + a_{-k+1}z + a_{-k+2}z^2 + \ldots)}_{=g(z)}.$$

Formal erhalten wir die analytische Funktion $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ indem wir f mit z^k multiplizieren und das Ergebnis stetig über a fortsetzen. Da der Pol genau Ordnung k hat, gilt $g(0) = a_{-k} \neq 0$.

Sei nun $R > 0$, dann wollen wir erreichen

$$|f(z)| = |z|^{-k}|g(z)| > R$$

für $|z|$ genügend klein. Durch Umstellen erhalten wir die Ungleichung $|g(z)|R^{-1} > |z|^k$. Da g stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|g(z)| > |a_{-k}|/2$ für $|z| < \delta$. Also ist die Ungleichung erfüllt für $|z| < r = \min(\delta, (|a_{-k}|R^{-1}/2)^{1/k})$.

(ii) Statt der Gleichung $w = f(z)$ für $|w| > R$ lösen wir die Gleichung $w^{-1} = f(z)^{-1} = z^k g(z)^{-1} = h(z)$. Der Vorteil ist, dass nun h eine analytische Funktion um 0 ist mit $h(0) = 0$. Nach dem Satz über die Gebietstreue ist also eine kleine Umgebung $B(0, \epsilon)$ im Bild von $B(0, r)$ unter h enthalten. Für $R = \epsilon^{-1}$ ist damit also jedes w mit $|w| > R$ im Bild von $B(0, r) \setminus \{0\}$ unter f enthalten.

(iii) Die Singularität von f bei i ist wesentlich. Wir können jeden der beiden vorigen Aufgabenteile verwenden, um dies zu zeigen.

Lösung 1: Betrachte die Folge $a_n = i\sqrt{1 - 2/(2n + 1)}$. Für $n \longrightarrow \infty$ geht die Folge gegen i. Wir berechnen

$$f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{-(1 - \frac{2}{2n+1}) + 1}\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^{n+1}.$$

Wir sehen, dass $f(a_n)$ beschränkt bleibt. Also kann nach der ersten Teilaufgabe f keinen Pol bei i haben. Wäre andererseits die Singularität i hebbar, könnten wir f

stetig fortsetzen. Dies ist ein Widerspruch, denn die Folge $f(a_n)$ konvergiert nicht, also hat f keinen Grenzwert für $z \longrightarrow i$. Da die Singularität weder hebbar noch ein Pol ist, muss sie wesentlich sein.
Lösung 2: Da die Funktion $q(z) = \frac{\pi}{z^2+1}$ einen Pol bei i hat, ist für jede punktierte Kreisscheibe $D = B(i, r) \smallsetminus \{i\}$ eine Menge der Form $B(0, R, \infty)$ im Bild von q enthalten. Da der Sinus aber auch im Komplexen eine Periode von 2π hat, gilt $\sin(B(0, R, \infty)) = \sin(\mathbb{C})$. Die Inklusion $\subset$ ist klar. Umgekehrt gibt es für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ so dass $z + 2\pi m \in B(0, R, \infty)$. Also gilt $\sin(z) = \sin(z + 2\pi m) \in \sin(B(0, R, \infty))$. Wir schliessen

$$f(D) = \sin(q(D)) \supset \sin(B(0, R, \infty)) = \sin(\mathbb{C}).$$

Das Bild der einer nicht-konstanten, ganzen Funktion ist aber dicht in $\mathbb{C}$. Also ist $f(D)$ dicht in $\mathbb{C}$ und nach dem Satz von Casorati-Weierstrass ist die Singularität bei i wesentlich.

Aufgabe 4. Sei a eine ausserwesentliche Singularität der analytischen Funktionen $f, g\colon U \smallsetminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ (das heisst a ist eine isolierte Singularität, die nicht wesentlich ist). Zeige, dass dann a auch eine ausserwesentliche Singularität der Funktionen $f \pm g$, fg und $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) ist. Zeige die Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f \pm g; a) &\geq \min\{\operatorname{ord}(f; a), \operatorname{ord}(g; a)\} \\ \operatorname{ord}(fg; a) &= \operatorname{ord}(f; a) + \operatorname{ord}(g; a) \\ \operatorname{ord}(\frac{f}{g}; a) &= \operatorname{ord}(f; a) - \operatorname{ord}(g; a) \end{aligned}$$

Lösung. Betrachten wir die Laurentreihenentwicklungen von f, g um den Punkt a. Da a jeweils eine nicht-wesentliche Singularität ist, kommen in beiden Reihen nur endlich viele negative Potenzen von $z - a$ vor:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots \\ g(z) &= b_l(z-a)^l + b_{l+1}(z-a)^{l+1} + \dots \end{aligned}$$

Hier sind $k, l \in \mathbb{Z}$ und falls $a_k \neq 0, b_l \neq 0$ dann gilt nach Definition gerade $k = \operatorname{ord}(f; a)$ und $l = \operatorname{ord}(g; a)$. Sei ohne Einschränkung $k \leq l$. Wir berechnen

$$(f \pm g)(z) = a_k(z-a)^k + \dots + a_{l-1}(z-a)^{l-1} + (a_l \pm b_l)(z-a)^l + (a_{l+1} \pm b_{l+1})(z-a)^{l+1} + \dots$$

Also gilt $\operatorname{ord}(f \pm g; a) \geq k = \min\{\operatorname{ord}(f; a), \operatorname{ord}(g; a)\}$. Hier kann ein $>$ auftreten, z.B. bei $f - g$ falls gilt $k = l$ und $a_k = b_l$.
Unter Verwendung der Formel des Cauchy-Produkts sehen wir

$$(fg)(z) = a_k b_l (z-a)^{k+l} + (a_{k+1}b_l + a_k b_{l+1})(z-a)^{k+l+1} + \dots$$

Da $a_k \neq 0$ und $b_l \neq 0$ gilt $a_k b_l \neq 0$ und damit lesen wir aus der Laurentreihenentwicklung von fg ab, dass $\operatorname{ord}(fg; a) = k + l = \operatorname{ord}(f; a) + \operatorname{ord}(g; a)$.

Schliesslich betrachen wir den Quotienten von f und g:

$$\begin{aligned}(\frac{f}{g})(z) &= \frac{(z-a)^k\,(a_k + a_{k+1}(z-a) + a_{k+2}(z-a)^2 + \dots)}{(z-a)^l\,(b_l + b_{l+1}(z-a) + b_{l+2}(z-a)^2 + \dots)} \\ &= (z-a)^{k-l}\underbrace{\frac{a_k + a_{k+1}(z-a) + a_{k+2}(z-a)^2 + \dots}{b_l + b_{l+1}(z-a) + b_{l+2}(z-a)^2 + \dots}}_{=h(z)}.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass h der Quotient zweier Funktionen ist, die beide analytisch bei a sind und dort nicht verschwinden (da $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$). Also ist h wieder eine analytische Funktion mit $h(a) = a_k/b_l \neq 0$, d.h. $\mathrm{ord}(h;a) = 0$. Also gilt (z.B. nach dem vorigen Aufgabenteil) $\mathrm{ord}(\frac{f}{g};a) = k - l = \mathrm{ord}(f;a) - \mathrm{ord}(g;a)$.

Aufgabe 5. Zeige folgende komplexe Version der Regeln von L'Hospital: Seien $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytische Funktionen, welche im Punkt $a \in U$ dieselbe Ordnung k haben. Dann gilt

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}.$$

Lösung. Da f, g analytisch in a sind, haben sie eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j, g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j.$$

Dass f, g Ordnung k haben bedeutet gerade $f^{(j)}(a) = g^{(j)}(a) = 0$ für $j < k$ und $f^{(k)}(a) \neq 0, g^{(k)}(a) \neq 0$. Also folgt

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \dots, g(z) = \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{g^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \dots$$

In beiden Potenzreihen können wir einen Faktor $(z-a)^k$ ausklammern. Das heisst es gibt analytische Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z-a)^k \tilde{f}(z)$ und $g(z) = (z-a)^k \tilde{g}(z)$ und man sieht $\tilde{f}(a) = f^{(k)}(a)/k!$, $\tilde{g}(a) = g^{(k)}(a)/k!$. Also gilt

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{(z-a)^k \tilde{f}(z)}{(z-a)^k \tilde{g}(z)} = \frac{\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(a)} = \frac{f^{(k)}(a)/k!}{g^{(k)}(a)/k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}.$$

Aufgabe 6. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze, injektive Funktion. Zeige, dass sie von der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ ist. Betrachte hierzu die Singularität der Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$ bei $z = 0$.

Lösung. Betrachte die analytische Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, g(z) = f(\frac{1}{z})$. Wir wollen den Typ der Singularität von g in 0 bestimmen.
Wäre die Singularität wesentlich, dann wäre das Bild M einer punktierten Kreisscheibe $B(0,r) \setminus \{0\}$ unter g dicht in $\mathbb{C}$ nach dem Satz von Casorati-Weierstrass. Aber es gilt

$$M = g(B(0,r) \setminus \{0\}) = f(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, r^{-1})).$$

Da f injektiv ist, muss aber die Menge $f(B(0, r^{-1}) \subset \mathbb{C}$ disjunkt sein von M. Andererseits ist diese Menge aber offen nach dem Satz über die Gebietstreue. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass M dicht in $\mathbb{C}$ ist, denn ein beliebiger Punkt in $f(B(0, r^{-1}))$ ist in einer kleinen Kreisscheibe enthalten, die disjunkt von M ist. Also kann die Singularität nicht wesentlich sein.
Es folgt, dass g an der Stelle 0 einen Pol hat oder eine hebbare Singularität. Wir vergleichen nun die Laurentreihenentwicklungen von f und g um 0:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \\ g(z) &= b_{-k} z^{-k} + b_{-k+1} z^{-k+1} + \dots + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \end{aligned}$$

Da $g(z) = f(z^{-1})$ und da die Laurentreihenentwicklung eindeutig ist, folgt aber $a_j = b_{-j}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Da aber $b_j = 0$ für $j < -k$ ist, gilt $a_l = 0$ für $l > k$. Also hat die Potenzreihenentwicklung von f nur endlich viele Glieder, das heisst f ist ein Polynom.
Da f injektiv ist, muss es genau Grad 1 haben, wodurch die Aufgabe gezeigt ist. In der Tat, ist f von Grad 0, so ist f konstant und damit nicht injektiv. Ist umgekehrt der Grad d von f grösser als 1, gibt es Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit genau d Urbildern unter f, ein Widerspruch. Dies sieht man z.B. so: sei D die endliche Menge der Nullstellen von f', dann hat jedes $w \in \mathbb{C} \setminus f(D)$ genau d Urbilder (denn bei allen Nullstellen des Polynoms $f - w$ ist die Ableitung $f' = (f - w)'$ ungleich 0).

⋆ **Aufgabe 7.**
(i) Sei p ein Polynom von Grad n und $f \colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Welche Art von isolierter Singularität hat $p \circ f$ in a?
(ii) Sei nun g eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Welche Singularität hat dann $g \circ f$?

⋆ **Aufgabe 8.** Bestimme alle Paare ganzer Funktionen f, g mit $f^2 + g^2 = 1$.