Musterlösung zu Übungsblatt 12

Die folgenden Aufgabe entwickelt Techniken, um mit Möbiustransformationen (auch "gebrochen-lineare Funktionen", "linear fractional transformations" genannt) zu arbeiten. Als Hilfestellung könntest du auch zuerst das entsprechende Kapitel in einem Lehrbuch, zum Beispiel Gamelin, II.7, Ahlfors III.3 oder Salomon 1.1.4 durcharbeiten, um die konkreten Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1. Jeder Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ ordnen wir die meromorphe Funktion

$$\phi_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

zu. Diese Funktion können wir als Endomorphismus $\mathbb{C} \coprod \infty \longrightarrow \mathbb{C} \coprod \infty$ auffassen. Wir nennen solche Abbildungen *Möbius-Transformationen*.

(i) Seien M, $N \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$. Zeige $\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN}$. Folgere daraus eine konkrete Formel für ϕ_M^{-1}.

(ii) Zeige, dass es für paarweise verschiedene z_1, z_2, z_3 aus $\mathbb{C} \coprod \infty$ genau eine Möbiustransformation ϕ_{z_1,z_2,z_3} mit $\phi(z_1) = 0$, $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = \infty$ gibt. Gib eine konkrete Formel für ϕ_{z_1,z_2,z_3} an.

(iii) Für paarweise verschiedene z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$ definieren wir das Doppelverhältnis

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \phi_{z_2,z_3,z_4}(z_1).$$

Zeige, dass

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$$

(iv) Sei T eine Möbiustransformation. Zeige

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

(v) Seien w_1, w_2, w_3, $w_4 \in \mathbb{C}$ ebenfalls alle verschieden. Zeige, dass es genau dann eine Möbiustransformation T mit $T(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gibt, wenn

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

(vi) Zeige, dass $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn alle z_i auf einer Gerade oder einem Kreis liegen.
Hinweis: Fasskreisbogen

(vii) Folgere, dass eine Möbiustransformation eine Gerade oder einen Kreis wieder auf eine Gerade oder einen Kreis abbildet.

Lösung. Die Fragen (i)-(iv) werden ausführlich im oben erwähnten Abschnitt II.7 des Buches “Complex Analysis” von Gamelin besprochen und können dort nachgelesen werden.
(v) Nach Aufgabenteil (iii) ist die Bedingung, dass eine Möbiustransformation mit $T(z_i) = w_i$ existiert, hinreichend damit $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. Um zu zeigen, dass sie notwendig ist, sei $S = \phi_{z_2,z_3,z_4}$ die Möbiustransformation, die die Punkte z_2, z_3, z_4 auf $0, 1, \infty$ abbildet und analog $S' = \phi_{w_2,w_3,w_4}$ die entsprechende Transformation für w_2, w_3, w_4. Per Definition gilt dann

$$S(z_1) = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4) = S'(w_1).$$

Dann ist $T = (S')^{-1} \circ S$ die gesuchte Möbiustransformation, die z_i auf w_i abbildet für $i = 1, 2, 3, 4$.
(vi) Betrachte zunächst die letzten drei Punkte z_2, z_3, z_4. Diese liegen entweder auf einer gemeinsamen Geraden oder es existiert ein eindeutiger Kreis K (der Umkreis des von ihnen gebildeten Dreiecks Δ), der durch diese Punkte verläuft. Sei α der (Innen-)Winkel des Dreiecks Δ bei z_3, dann ist der Kreis K genau die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_2, z_4\}$, so dass das Dreieck mit Eckpunkten z_2, z_4, z den Winkel α oder $\pi - \alpha$ bei z hat. Dies ist der Inhalt des Umfangs- oder Peripheriewinkelsatzes; der Kreis K ist dann die Vereinigung der Fasskreisbögen der Strecke z_2, z_4 für die Winkel $\alpha, \pi - \alpha$.
Nach der expliziten Formel für das Doppelverhältnis aus (ii) gilt

$$\mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4) = \phi_{z_2,z_3,z_4}(z) = \frac{z - z_2}{z - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Diese Zahl ist genau dann reell, wenn ihr Argument 0 oder π ist. Wir sehen

$$\arg(\mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4)) = \arg\left(\frac{z - z_2}{z - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}\right).$$

Mit der Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen sieht man, dass auf der rechten Seite der linke Term gerade der Winkel der Strecke $z_4 z$ zur Strecke $z_2 z$ ist und der rechte Term der Winkel von $z_4 z_3$ zu $z_2 z_3$. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist genau dann 0 wenn das Dreieck z_2, z_4, z denselben Winkel bei z hat wie das Dreieck z_2, z_4, z_3. Analoges gilt für die Differenz π (dann liegen z, z_3 auf unterschiedlichen Seiten der Geraden durch z_2, z_4). Mit dem Umfangswinkelsatz folgt die Behauptung. Der Fall, dass z_2, z_3, z_4 auf einer Geraden liegen geht analog (hier ist $\alpha = 0$).
(vii) Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Kreis oder eine Gerade. Dann kann M durch drei paarweise verschiedene Punkte $z_2, z_3, z_4 \in M$ eindeutig festgelegt werden. Wie wir gesehen haben gilt:

$$M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, z_4\} : \mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}\} \cup \{z_2, z_3, z_4\}.$$

Sei T eine Möbiustransformation, dann gilt nach Teilaufgabe (v) dass

$$TM = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, z_4\} : \mathrm{DV}(w, Tz_2, Tz_3, Tz_4) \in \mathbb{R}\} \cup \{Tz_2, Tz_3, Tz_4\}.$$

Also ist TM exakt der Kreis oder die Gerade, die durch die Punkte Tz_2, Tz_3, Tz_4 verläuft.

Aufgabe 2. Finde eine Möbiustransformation T mit $T(-1) = -1$, $T(0) = i$, $T(1) = 1$.

Lösung. Wir suchen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, so dass für

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Möbiustransformation $T = \phi_M$ die gewünschten Eigenschaften hat. Betrachtet man die Gleichung $T(-1) = -1$ ergibt sich

$$T(-1) = \frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} = -1 \iff -a + b = c - d.$$

Analog geben die beiden anderen Gleichungen

$$b = i \cdot d, a + b = c + d.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den vier Unbekannten a, b, c, d und drei Gleichungen. Durch ein Gaussverfahren bestimmen wir die möglichen Lösungen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \text{ für } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Man sieht leicht, dass die Transformation T unabhängig von der Skalierung mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ist, also ist die eindeutige Lösung

$$T(z) = \frac{z + i}{iz + 1} = -i\frac{z + i}{z - i}.$$

Aufgabe 3. Gibt es eine Möbiustransformation T mit $T(0) = -1$, $T(i) = 0$, $T(2i) = \frac{1}{3}$ und $T(1) = 1$?

Lösung. Es gibt keine solche Transformation und wir präsentieren drei Lösungen, in aufsteigender Länge:

Lösung 1: Die vier Punkte $-1, 0, \frac{1}{3}, 1$ liegen alle auf einer Geraden, aber die Punkte $0, i, 2i, 1$ liegen nicht auf einem Kreis oder einer Geraden. Wir erhalten einen Widerspruch zu Aufgabe 1, (vii).

Lösung 2: Wir verwenden Aufgabe 1, (vi) und überprüfen, ob die Doppelverhältnisse der Punkte übereinstimmen:

$$\mathrm{DV}(0, i, 2i, 1) = \frac{0 - i}{0 - 1}\frac{2i - 1}{2i - i} = i(2 + i) = 2i - 1,$$
$$\mathrm{DV}(-1, 0, \frac{1}{3}, 1) = \frac{-1 - 0}{-1 - 1}\frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 0} = \frac{1}{2}(-2) = -1.$$

Da die Zahlen nicht übereinstimmen kann es keine Möbiustransformation geben, die $0, i, 2i, 1$ auf $-1, 0, \frac{1}{3}, 1$ abbildet.

Lösung 3: Wir könnten wir in Aufgabe 2 die ersten drei Bedingungen $T(0) = -1$, $T(i) = 0$, $T(2i) = \frac{1}{3}$ verwenden, um die eindeutige Transformation T zu berechnen, die diese erfüllt und dann überprüfen, dass $T(1) \neq 1$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

Bestimme die Bilder der Punktmengen

$$A = \{\operatorname{Re} z = 0\} \qquad B = \{\operatorname{Im}(z) = 0\} \qquad C = \{\operatorname{Re} z > 0\} \qquad D = \{|z| < 1\}$$

unter der Abbildung T.

Lösung. Für $z = \lambda i \in A$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\lambda i + 1}{\lambda i - 1} = (\lambda i + 1)(-\lambda i - 1)/(\lambda^2 + 1) = -\left(\frac{\lambda i + 1}{|\lambda i + 1|}\right)^2.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ durchläuft $\frac{\lambda i+1}{|\lambda i+1|}$ gerade den offenen Halbkreis $\{e^{it} : t \in (-\pi, \pi)\}$. Also durchläuft das Quadrat dieser Zahlen gerade den Einheitskreis ohne den Punkt -1. Nach der Multiplikation mit -1 erhalten wir also

$$T(A) = \partial B(0,1) \setminus \{1\}.$$

Für $z \in B = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sehen wir, dass $T(z) \in \mathbb{R}$. Tatsächlich hat die rationale Funktion $x \longmapsto (x+1)/(x-1)$ Wertbereich $\mathbb{R} \setminus \{1\} = T(B)$.
Die Menge C ist die Vereinigung von Geraden $l_\lambda = \{\operatorname{Re} z = \lambda\}$ für $\lambda > 0$. Diese werden auf Kreise oder Geraden k_λ abgebildet, in denen ein Punkt fehlt (nämlich der "fehlende Punkt im Unendlichen" $T(\infty) = 1$). Andererseits wird $\lambda \in l_\lambda$ auf $p_\lambda = (\lambda+1)/(\lambda-1) \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \setminus [-1, 1]$ abgebildet. Da ausserdem $\overline{T(z)} = T(\overline{z})$ gilt und l_λ invariant unter komplexer Konjugation ist, muss auch $k_\lambda = T(l_\lambda)$ invariant sein, also symmetrisch bezüglich der reellen Achse. Diese Informationen legen k_λ eindeutig fest. Für $\lambda \neq 1$ ist k_λ der Kreis um $(p_\lambda + 1)/2$ mit Radius $(1 - p_\lambda)/2$, minus den Punkt 1. Für $\lambda = 1$ erhalten wir gerade $k_\lambda = \{1 + \alpha i : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Zusammen überdecken diese Mengen genau die komplexe Ebene ohne die abgeschlossene Einheitskreisscheibe: $T(C) = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,1)$.
Die Menge D ist die Vereinigung der Kreise $k_r = \partial B(0, r)$ für $r \in (0, 1)$ und des Punktes 0. Unter T wird der Kreis k_r wieder auf einen Kreis $\tilde{k}_r$ abgebildet, der wieder symmetrisch bezüglich der reellen Achse sein muss nach dem gleichen Argument wie oben. Die Punkte $r, -r$ werden von T abgebildet auf

$$T(r) = \frac{r+1}{r-1} \in (-\infty, -1), T(-r) = \frac{-r+1}{-r-1} \in (-1, 0).$$

Beachte auch $T(r) \longrightarrow -\infty, T(-r) \longrightarrow 0$ für $r \longrightarrow 1$. Dadurch sind die Kreise eindeutig festgelegt und man überlegt sich, dass sie zusammen mit $T(0) = -1$ genau die linke Halbebene $\{z : \operatorname{Re} z < 0\} = T(D)$ überdecken.

Aufgabe 5. Bestimme $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. (Hinweis: Aufgabe 5, letzte Serie)

Lösung. Wir haben dort gezeigt, dass jede injektive Abbildung $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ von der Form $f(z) = az + b$ ist. Jede bijektive Abbildung ist also von der Form

$$f(z) = az + b$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, $b \in \mathbb{C}$. Sehen wir sie als Moebiustransformation, erkennen wir, dass

$$\operatorname{Aut}\mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}.$$

Aufgabe 6. Berechne

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Lösung. Da die zu integrierende Funktion gerade ist, gilt

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Es genügt also das letztere Integral zu berechnen. Wir verwenden die Formel $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ und erhalten

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1).$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir also

$$I = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2ix}+1}{(x^2+1)^2}\, dx\right).$$

Da der Grad des Nenners in x gleich $4 \geq 2$ ist, und da $|e^{2iz} + 1| \leq |e^{2iz}| + 1 \leq 2$ für $\mathrm{Im}(z) > 0$ können wir das Integral auf den Limes von Integralen über Halbkreisen in der oberen Halbebene zurückführen (vergleiche Typ II aus der Vorlesung). Da $(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$, ist die einzige Polstelle der zu integrierenden Funktion in der oberen Halbebene bei $z = i$ und von Ordnung 2. Wir erhalten also über den Residuensatz

$$I = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2iz}+1}{(z^2+1)^2}, i\right)\right).$$

Mit den Rechenregeln für Residuen berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-i)^2}\frac{e^{2iz}+1}{(z+i)^2}, i\right) &= \frac{d}{dz}\frac{e^{2iz}+1}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} \\
&= \frac{(2i(z+i)^2 - 2(z+i))e^{2iz} - 2(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} \\
&= \frac{(2i(-4) - 4i)e^{-2} - 4i}{16} = \frac{-3ie^{-2} - i}{4}
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$I = \pi\frac{3e^{-2}+1}{8}.$$

Aufgabe 7. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k < n$. Zeige, dass

$$\int_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Lösung. Da der Integrand gerade ist, sehen wir

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}}\,dt.$$

Aufgrund der Voraussetzung $k < n$ ist der Grad der zu integrierenden rationalen Funktion kleiner gleich -2, also können wir die Strategie für Integrale von Typ I anwenden. Die Polstellen der Funktion $z^{2k}/(z^{2n}+1)$ sind genau die $(2n)$-ten Wurzeln von -1, alle Polstellen von Ordnung 1. Dies sind genau die Zahlen

$$z_j = \exp(i(\frac{\pi}{2n}))\rho^j, 0 \leq j < 2n,$$

für $\rho = \exp(2\pi i/(2n))$ eine $(2n)$-te Einheitswurzel. Es gilt also $z^{2n}+1 = \prod_{j=0}^{2n-1}(z-z_j)$. Von diesen Polstellen sind genau $z_0, \ldots, z_{n-1}$ in der oberen Halbebene. Um die Residuen an diesen Stellen auszurechnen, verwenden wir die Formel $\mathrm{Res}(f/g, w) = f(w)/g'(w)$ für f analytisch und g mit einfacher Nullstelle an $w \in \mathbb{C}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}2\pi i \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Res}(\frac{z^{2k}}{z^{2n}+1}, z_j) \\ &= \pi i \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j^{2k}}{2n z_j^{2n-1}} \\ &= \frac{\pi i}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{2k-2n+1}. \end{aligned}$$

Beachte, dass als Nullstelle von $z^{2n}+1$ natürlich gilt $z_j^{-2n} = (z_j^{2n})^{-1} = (-1)^{-1} = -1$. Aus der Formel für z_j sehen wir $z_j = z_0\rho^j$. Setzen wir dies ein, ergibt sich z.B. mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi i}{2n} z_0^{2k+1} \sum_{j=0}^{n-1} (\rho^j)^{2k+1} \\ &= -\frac{\pi i}{2n} z_0^{2k+1} \sum_{j=0}^{n-1} (\rho^{2k+1})^j \\ &= -\frac{\pi i}{2n} z_0^{2k+1} \frac{1-(\rho^{2k+1})^n}{1-\rho^{2k+1}} \\ &= -\frac{\pi i}{2n} z_0^{2k+1} \frac{2}{1-\rho^{2k+1}}. \end{aligned}$$

Hier verwenden wir $\rho^n = -1$ und $(-1)^{2k+1} = -1$. Ziehen wir den Term z_0^{2k+1} in den Nenner und setzen die Formeln für z_0 und ρ ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi}{2n}\frac{2i}{e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2n}i} - e^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}i}} \\ &= -\frac{\pi}{2n}\frac{1}{\sin(-\frac{(2k+1)\pi}{2n})}. \end{aligned}$$

Da $\sin(-y) = -\sin(y)$, folgt die Behauptung.

Aufgabe 8. Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene.

(i) Zeige, dass jeder Automorphismus von $\mathbb{C}$ eine Möbiustransformation ist. (Hinweis: Es gibt eine bihomolomorpher Abbildung zwischen $\mathbb{H}$ und einer Einheitskreisscheibe).

(ii) Zeige, dass jeder solcher Automorphismus sogar als Möbiustransformation mit reellen Koeffizienten geschrieben werden kann.

(iii) Zeige, dass

$$\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\colon a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc = 1 \right\} / \pm I = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Lösung. Das wird in den Notizen zu Automorphismusgruppen auf der Webseite gezeigt.

⋆ **Aufgabe 9.** Zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$