

## Musterlösung zu Übungsblatt 2

**Aufgabe 1.** Welche dieser Funktionen können Realteil einer analytischen Funktion sein? Gib diese gegebenenfalls an:

- (i)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$
- (ii)  $u(x, y) = e^x \sin(y)$
- (iii)  $u(x, y) = e^x \sinh(y)$

**Lösung.** (i) Um den Realteil einer potentiellen analytischen Funktion  $f = u + vi$  zu finden mit  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ , wollen wir die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen verwenden. In der Tat wissen wir dann über die Funktion  $v$ , dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2.\end{aligned}$$

Nehmen wir die untere Gleichung und integrieren nach  $y$  so ergibt sich

$$v = 3x^2y - y^3 + g(x)$$

für eine differenzierbare Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Um auch  $g$  zu bestimmen, setzen wir nun in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + g'(x) \stackrel{!}{=} 6xy.$$

Also muss  $g'(x) = 0$  sein und damit  $g(x) = c$  eine Konstante. Dann aber erfüllt das  $v$  oben die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Also sind haben genau die Funktionen

$$f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + 1 + (3x^2y - y^3 + c)i = (x + iy)^3 + 1 + ci$$

die Eigenschaft  $\operatorname{Re}(f) = u$ .

(ii) Analog wie oben sehen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos(y), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin(y).\end{aligned}$$

Wir erhalten  $v(x, y) = -e^x \cos(y) + g(x)$  und durch Einsetzen  $g'(x) = 0$ . Damit ergibt sich also

$$f(x + yi) = e^x \sin(y) - e^x \cos(y)i + ci = -ie^{x+iy} + ci.$$

- (iii) Laut Vorlesung muss der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch sein. Hier gilt aber:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sinh(y) + e^x \sinh(y) \neq 0.$$

Also verschwindet  $\Delta u$  auf keiner offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und damit gibt keine Funktion  $f$ , die analytisch auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist mit  $\operatorname{Re}(f) = u$ .

### Aufgabe 2.

- (i) Leiten Sie die Polarform der Cauchy-Riemann Gleichungen her:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

- (ii) Überprüfen Sie, dass für jede ganze Zahl  $m$  die Funktionen

$$u(re^{i\theta}) := r^m \cos(m\theta), \quad v(re^{i\theta}) := r^m \sin(m\theta)$$

die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen.

**Lösung.** (i) Im Folgenden schreiben wir der Übersichtlichkeit halber  $\phi_x$  statt  $\partial\phi/\partial x$  für die Ableitung einer Funktion  $\phi$  nach einer Variablen  $x$ . Wir haben  $u(x, y) = u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$  und  $v(x, y) = v(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ . Dann gilt nach dem Kettenregel für  $u$ :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -r \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.$$

Analog gilt für  $v$ :

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -r \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Wir invertieren die Matrix und bekommen:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\frac{1}{r} \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \frac{1}{r} \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_{\vartheta} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\frac{1}{r} \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \frac{1}{r} \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_{\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen und den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, nämlich

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

folgt, dass:

$$\cos \vartheta u_r - \frac{1}{r} \sin \vartheta u_{\vartheta} = u_x = v_y = \sin \vartheta v_r + \frac{1}{r} \cos \vartheta v_{\vartheta} \quad (I);$$

$$\sin \vartheta u_r + \frac{1}{r} \cos \vartheta u_{\vartheta} = u_y = -v_x = -\cos \vartheta v_r + \frac{1}{r} \sin \vartheta v_{\vartheta} \quad (II).$$

Wenn man (I) mit  $-r \sin \vartheta$  und (II) mit  $r \cos \vartheta$  multipliziert und die Resultate addiert, erhält man

$$u_{\vartheta} = -r v_r.$$

Multipliziert man andererseits (I) mit  $\cos \vartheta$  und (II) mit  $\sin \vartheta$  und addiert man die Resultate, so erhält man

$$u_r = \frac{1}{r} v_\vartheta.$$

Diese sind die gesuchten Differenzialgleichungen. Es lässt sich nach Einsetzen in die Gleichungen oben überprüfen, dass die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen in Normalform aus ihnen folgen.

(ii) Wir bestimmen zuerst die partielle Ableitungen von  $u$  und  $v$  nach  $r$  und  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= mr^{m-1} \cos(m\vartheta), & \frac{\partial u}{\partial \vartheta} &= -mr^m \sin(m\vartheta), \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= mr^{m-1} \sin(m\vartheta), & \frac{\partial v}{\partial \vartheta} &= mr^m \cos(m\vartheta). \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= mr^{m-1} \cos(m\vartheta) = \frac{1}{r} mr^m \cos(m\vartheta) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \text{ und} \\ \frac{\partial u}{\partial \vartheta} &= -mr^m \sin(m\vartheta) = -r (mr^{m-1} \sin(m\vartheta)) = -r \frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine *stückweise differenzierbare Kurve* in  $U$  von  $p \in U$  nach  $q \in U$  in  $U$  ist eine stetige Abbildung  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\phi(0) = p$ ,  $\phi(1) = q$ , so dass es  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  gibt derart, dass  $\phi|_{(t_{i-1}, t_i)}$  differenzierbar ist für alle  $i = 1, \dots, n$ .

(i) Ist  $\phi$  eine stückweise differenzierbare Kurve von  $p \in U$  nach  $q \in U$  und  $\psi$  eine solche Kurve von  $q$  nach  $r \in U$ , dann ist

$$\psi * \phi : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto \begin{cases} \phi(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi(2t - 1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stückweise differenzierbare Kurve in  $U$  von  $p$  nach  $r$ .

(ii) Die Relation  $\sim$  auf  $U$  definiert für  $p, q \in U$  durch

$$p \sim q \iff \text{Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve von } p \text{ nach } q$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind offene Teilmengen von  $U$ .

(iii) Folgere: Ist  $U$  zusammenhängend, dann können je zwei Punkte in  $U$  durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbunden werden.

**Erinnerung:**  $U \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend, falls für alle  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  offen und disjunkt mit  $U \subset A \cup B$  folgt  $A \cap U = \emptyset$  oder  $B \cap U = \emptyset$ .

(iv) Schliesse, dass für eine offene, zusammenhängende Menge  $U \subset \mathbb{C}$  jede analytische Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f' = 0$  konstant ist.

**Lösung.** (i) Die Abbildungen  $[0, 1/2] \xrightarrow{t \mapsto 2t} [0, 1]$  und  $[1/2, 1] \xrightarrow{t \mapsto 2t-1} [0, 1]$  sind differenzierbar und insbesondere stetig. Dies impliziert sofort, dass die Abbildung  $\psi * \phi$  auf  $[0, 1/2[ \cup ]1/2, 1]$  stetig ist, denn hier stimmt sie mit der Komposition der obigen Abbildungen und den Funktionen  $\psi$  und  $\phi$  überein. Für die Stetigkeit bei  $1/2$  überlegt man sich, dass der links- und rechtsseitige Grenzwert existieren und gleich sind:

$$\lim_{t \rightarrow 1/2^-} (\psi * \phi)(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \phi(t) = q = \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow 1/2^+} (\psi * \phi)(t).$$

Sind schliesslich  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  die Grenzen zwischen denen  $\phi$  differenzierbar ist und  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$  die Grenzen für  $\psi$ , dann kann man für  $\psi * \phi$  die Grenzen

$$0 = t_0/2 < t_1/2 < \dots < t_n/2 = 1/2 = s_0/2 + 1/2 < s_1/2 + 1/2 < \dots < s_m/2 + 1/2 = 1$$

wählen.

(ii) Es gilt für  $p, q, r \in U$ :

- $p \sim p$ : der konstante Weg  $\phi(t) = p$  verbindet  $p$  mit sich selbst,
- $p \sim q \implies q \sim p$ : geht  $\phi$  von  $p$  nach  $q$ , dann geht  $\phi \circ (t \mapsto 1 - t)$  von  $q$  nach  $p$ ,
- $p \sim q, q \sim r \implies p \sim r$ : ist  $\phi$  ein Weg von  $p$  nach  $q$  und  $\psi$  ein Weg von  $q$  nach  $r$ , dann ist laut dem ersten Aufgabenteil  $\psi * \phi$  ein Weg von  $p$  nach  $r$ .

Damit ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation. Um zu zeigen, dass Äquivalenzklassen von  $\sim$  offen sind, müssen wir beweisen, dass für jedes  $p \in U$  ein  $r > 0$  existiert, so dass  $B_r(p) \subset [p] = \{q \in U : q \sim p\}$  gilt. Da  $U$  offen ist finden wir zunächst ein  $r > 0$  so dass  $B_r(p) \subset U$ . Aber für jedes  $q \in B_r(p)$  ist der Pfad  $\phi(t) = tq + (1 - t)p$  differenzierbar, vollständig in  $B_r(p)$ , also auch in  $U$  enthalten und verbindet  $p$  mit  $q$ . Also  $q \sim p$ .

(iii) Gäbe es zwei Punkte  $p, q \in U$ , die nicht durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbunden werden können, gäbe es mehr als eine Äquivalenzklasse für die Relation  $\sim$ . Wähle  $A = [p]$  und  $B = U \setminus A$ , dann ist  $A$  eine offene Menge nach dem letzten Aufgabenteil,  $B$  ist die Vereinigung aller Äquivalenzklassen von  $\sim$  die nicht  $[p]$  sind. Da alle diese Äquivalenzklassen offen sind, ist auch  $B$  offen und natürlich bilden  $A, B$  eine disjunkte offene Überdeckung von  $U$  mit  $p \in A, q \in B$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $U$  zusammenhängend sein soll.

(iv) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $f' = 0$  auf einer zusammenhängenden offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$ . Es genügt zu zeigen, dass für Punkte  $p, q \in U$  gilt  $f(p) = f(q)$ . Laut dem vorigen Aufgabenteil können wir eine stückweise differenzierbare Kurve  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  finden mit  $\phi(0) = p, \phi(1) = q$ . Sei  $\phi$  differenzierbar ausserhalb der Stellen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , dann gilt nach der Kettenregel aus der Vorlesung:

$$(f \circ \phi)'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t) = 0$$

für  $t \in [0, 1] \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , also ist  $f \circ \phi$  gleich einer Konstante  $z_i$  auf dem offenen Intervall  $]t_{i-1}, t_i[$  für  $i = 1, \dots, n$ . Da aber  $f \circ \phi$  auch stetig ist folgt

$$z_i = \lim_{t \rightarrow t_i^-} (f \circ \phi)(t) = (f \circ \phi)(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} (f \circ \phi)(t) = z_{i+1},$$

für  $i = 1, \dots, n - 1$ . Also sind alle  $z_i$  konstant gleich  $z$  und wiederum mit Stetigkeit folgt

$$f(p) = f(\phi(0)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \phi)(t) = z = \lim_{t \rightarrow 1^-} (f \circ \phi)(t) = f(\phi(1)) = f(q).$$

**Aufgabe 4.** Reelle Funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stellen wir uns üblicherweise als Graphen  $\{(x, g(x))\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vor. Bei einer komplexen Funktion wäre dieser Graph aber eine Teilmenge des vierdimensionalen Raums  $\mathbb{C}^2$ . Deshalb müssen wir uns anders behelfen. Verschiedene Methoden eine komplexe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w = f(z)$  darzustellen wären:

- (i) Man stellt sich die Funktion  $f$  als Verformung der Zahlenebene  $f$  vor. Um diese zu zeichnen, betrachtet man die Bilder der Gitternetze  $\operatorname{Re} z = \text{konstant}$ ,  $\operatorname{Im} z = \text{konstant}$  oder des Polarkoordinatennetzes  $r = \text{konstant}$ ,  $\phi = \text{konstant}$ .
- (ii) Man zeichnet ein ‘‘Höhenlinienbild’’ von  $f$ , das heisst, man zeichnet die Urbilder der Gitternetze  $\operatorname{Re} w = \text{konstant}$ ,  $\operatorname{Im} w = \text{konstant}$ .
- (iii) Man zeichnet den (dreidimensionalen) Graphen der Funktion  $|f|$ .

Führe diese Methoden für  $f(z) = z^3$  durch. Aus der Vorlesung wissen wir, dass  $f$  analytisch, also eine konforme Abbildung ist. Wo an deinen Zeichnungen kann man das auch erkennen?

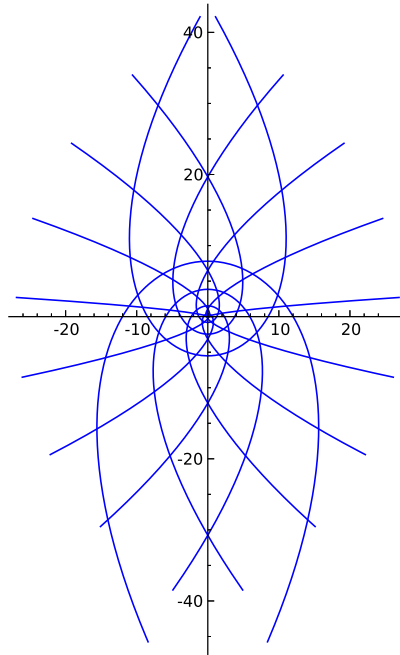
**Lösung.** Eine gute Möglichkeit, die obigen Darstellungen mithilfe eines Computers durchzuführen ist die offene Software **SAGE** (siehe <http://www.sagemath.org/>), doch auch andere Programme wie **Maple** oder **Mathematica** können dazu verwendet werden. Um  $f(z) = z^3$  hiermit darzustellen, berechnen wir zunächst die Zerlegung  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Hier gilt:

$$(x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

Um z.B. die Bilder der Linien  $\operatorname{Im} z = \text{konstant} = c$  zu bestimmen, setzen wir also  $y = c$  und stellen die parametrisierte Kurve  $x \mapsto (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$  dar. Für verschiedene Werte von  $c$  erhalten wir eine Familie von Kurven. Der folgende **SAGE**-Code gibt die Bilder für  $y = i/2.4 + 0.1$  für  $i = -5, \dots, 4$  aus (diese Formel soll verwirrende Symmetrien des Ausgabebildes vermeiden).

```
g=Graphics()
x=var('x')
for i in range(-5,5):
    y=i/2.4+0.1
    p=parametric_plot( (x^3-3*x*y^2,3*x^2*y-y^3), (x,-3,3), color='blue')
    g=g+p
g.show()
```

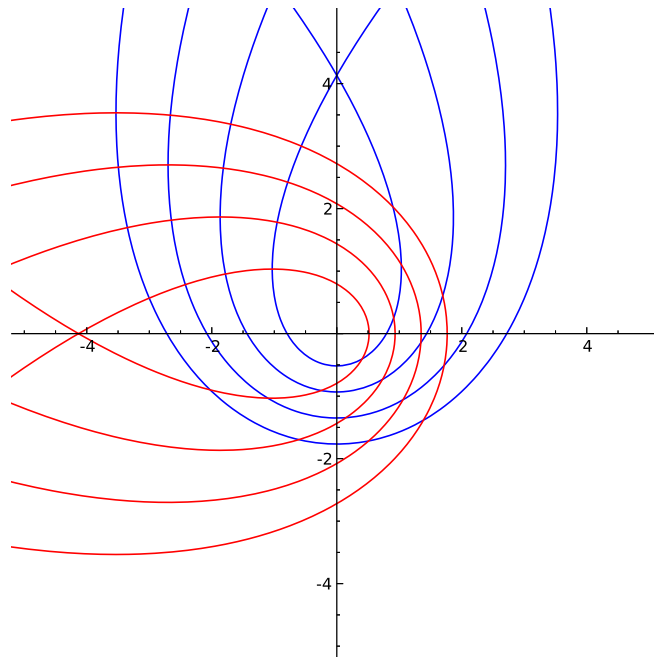
Das ausgegebene Bild ist das folgende:



Für das Bild der Menge  $\{z : \operatorname{Re}(z) = c\} = \{-iz : \operatorname{Im}(z) = c\}$  kann man sich einfach überlegen, dass  $(-iz)^3 = iz^3$ , das heisst dieses Bild entsteht aus dem obigen durch Multiplikation mit  $i$ , dh. eine Drehung um 90 Grad im mathematisch positiven Sinn. Zeichnen wir beide Familien in das gleiche Koordinatensystem, erhalten wir ein Bild, auf dem wir erkennen können, dass  $f$  konform ist. Hierfür hilft es zum einen  $c$  durch eine dritte Wurzel zu skalieren, damit die Bildlinien etwa den gleichen Abstand haben, zum anderen sollte man das Bild geeignet zuschneiden. Beispiel für einen solchen Code wäre:

```
g=Graphics()
x=var('x')
for i in range(1,5,1):
    y=i/2.4+0.1
    y=y.nth_root(3)
    p=parametric_plot( (x^3-3*x*y^2,3*x^2*y-y^3), (x,-3,3), color='blue')
    g=g+p
y=var('y')
for i in range(1,5,1):
    x=i/2.4+0.1
    x=x.nth_root(3)
    p=parametric_plot( (x^3-3*x*y^2,3*x^2*y-y^3), (y,-3,3), color='red')
    g=g+p
g.xmin(-5)
g.xmax(5)
g.ymin(-5)
g.ymax(5)
g.show()
```

Die Bildausgabe sieht dann so aus:



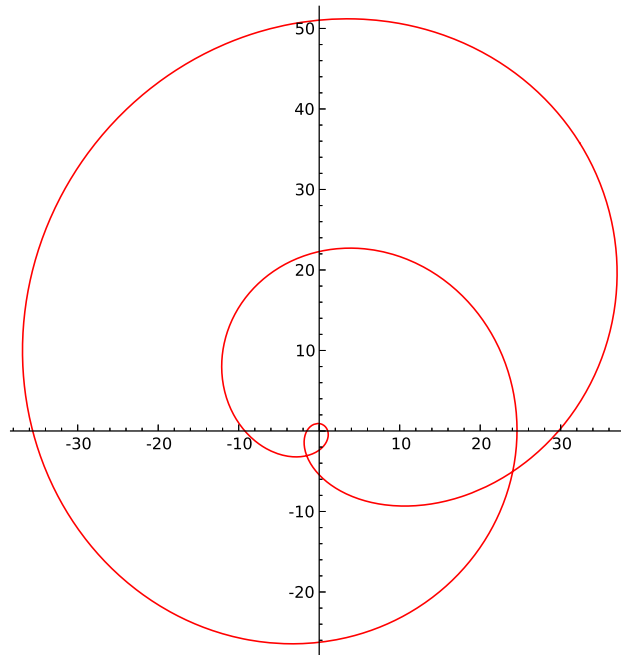
Im oberen linken Quadranten sehen wir die Bilder der Schnittpunkte unserer ursprünglichen Kurven  $\{z : \operatorname{Re}(z) = c\}$  und  $\{z : \operatorname{Im}(z) = d\}$  und erkennen, dass die Bildkurven sich immer noch orthogonal schneiden. Die anderen Schnittpunkte der Bildkurven in der unteren linken Seite sind nicht orthogonal, stammen aber auch nicht von Schnittpunkten der Ursprungskurven.

Für die entsprechenden Bilder des Polarkoordinatennetzes stellen wir fest  $(re^{ti})^3 = r^3e^{3ti}$ . Also ist das Bild des Kreises  $\{z : |z| = r\}$  genau der Kreis  $\{z : |z| = r^3\}$ . Auch für einen fixen Winkel  $t \in [0, 2\pi]$  sehen wir, dass das Bild des Strahls  $\{re^{ti} : r \geq 0\}$  gerade der Strahl  $\{r^3e^{3ti} : r \geq 0\}$  zum Winkel  $3t$  ist.

Um zu verstehen, was mit einer geschlossenen Kurve geschieht, die um den Ursprung verläuft, hilft es, nicht das Bild des Kreises um den Ursprung zu betrachten, sondern diesen Kreis etwas zu verschieben und asymmetrisch zu strecken. Der folgende Code gibt ein Bild der Ellipse um  $(1/2, 1)$  mit Halbachsen 3 und 2 aus.

```
parametric_plot((( 0.5+3*cos(t))^3-3*(0.5+3*cos(t))*(1+2*sin(t))^2,
3*(0.5+3*cos(t))^2*(1+2*sin(t))-(1+2*sin(t))^3), (t,0,2*pi), color='red')
```

Das entsprechende Bild sieht folgendermassen aus:



Wir erkennen, dass sich die Bildkurve insgesamt dreimal um den Ursprung windet. Dass die Zahl der Windungen gleich dem Grad der Nullstelle der Funktion  $f$  an dieser Stelle entspricht, ist kein Zufall!

Als nächstes betrachten wir die Urbilder der Gitternetze  $\operatorname{Re} w = \text{konstant}$  und  $\operatorname{Im} w = \text{konstant}$ . Dies sind gerade die Höhenlinien der Funktionen  $x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3$  von oben. Beachte hier, dass für ein festes  $c \in \mathbb{R}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt:

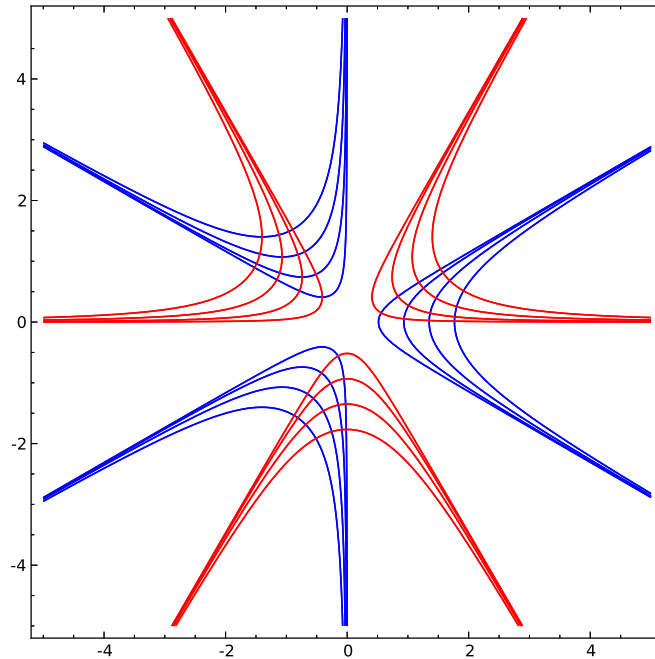
$$\operatorname{Re}(z^3) = c \iff \operatorname{Im}\left(\left(e^{\pi/6i} z\right)^3\right) = c.$$

Also entstehen die Urbilder der Gitterlinien für den Imaginärteil gerade durch Drehung um  $\pi/6$ , also 30 Grad in mathematisch positiver Richtung aus den Urbildern für den Realteil. Zur Darstellung mit **SAGE** können wir die Funktion `implicit_plot` verwenden, z.B.

```
implicit_plot(x^3-3*x*y^2-2, (x, -5, 5), (y, -5, 5))
```

für das Urbild der Geraden mit Gleichung  $\operatorname{Re}(z) = 2$ . Zeichnet man Urbilder der Real- (blau) und Imaginärgitterlinien (rot) in ein gemeinsames Bild, erkennt man wiederum, dass die Funktion  $f$  konform ist.





Schliesslich können wir uns noch den Graphen der Funktion  $|f|$  ansehen. Wie oben sieht man  $|z^3| = |z|^3$ . Man sieht also, dass  $|f(z)|$  nicht vom Argument von  $z$  abhängt, der Graph in  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  ist also rotationssymmetrisch um die  $\mathbb{R}$ -Achse. Er ist gerade die Rotationsfläche des Graphen der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^3$ . Für eine Darstellung in SAGE kann man z.B.

```
plot3d(( x^2+y^2)^(3/2), (x, -2, 2), (y, -2, 2))
```

verwenden.

**Aufgabe 5.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ . Zeige: Ist  $f$  konform auf  $U$ , dann ist  $f$  analytisch auf  $U$  mit  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ .

**Lösung.** Nach Definition ist  $f$  konform falls  $f$  stetig differenzierbar ist, winkeltreu und  $\det(Df)(z) > 0$  für alle  $z \in U$  erfüllt. Um zu zeigen, dass  $f$  analytisch ist, überprüfen wir die Cauchy-Riemann Gleichungen mit  $f = u + iv$ . Sei  $z \in U$  und betrachte die Matrix

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

An der Stelle  $z$  betrachten wir nun zwei Paare von orthogonalen Vektoren:  $(1, 0)^T, (0, 1)^T$  sowie  $(1, 1)^T, (1, -1)^T$ . Wegen der Winkeltreue von  $f$  sind die Bildvektoren auch orthogo-

nal. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}0 &= \left( Df(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( Df(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= ab + cd, \\ 0 &= \left( Df(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( Df(z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} \\ &= (a+b)(a-b) + (c+d)(c-d) = a^2 + c^2 - b^2 - d^2.\end{aligned}$$

Also sind die Vektoren  $(a, c)^T, (b, d)^T$  in  $\mathbb{R}^2$  orthogonal und da  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  gilt, haben sie die gleiche Länge. Hieraus folgt  $(b, d) = \pm(-c, a)$ , da wegen  $\det(Df(z)) > 0$  gilt  $(a, c) \neq (0, 0)$ . Setzen wir ein, erhalten wir

$$\det(Df(z)) = \pm(a \cdot a - c(-c)) = \pm(a^2 + c^2).$$

Da dies nach Voraussetzung positiv sein soll, müssen wir  $b = -c, d = a$  wählen. Dies sind genau die Cauchy-Riemann Gleichungen für  $f$ .