Musterlösung zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Seien $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, $g\colon U \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytische Funktionen mit $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zeige, dass dann $\frac{f}{g}$ analytisch ist mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Lösung. Jedes beliebige Buch über Funktionentheorie.

Aufgabe 2. Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeige, dass f konstant sein muss, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\mathrm{Re}\, f =$ konstant
- $\mathrm{Im}\, f =$ konstant
- $|f| =$ konstant

Lösung. Betrachten wir zunächst den Fall $\mathrm{Re}\, f =$ konstant. In der üblichen Darstellung $f = u + iv$ bedeutet dies gerade $u =$ konstant. Zusammen mit den Cauchy-Riemann Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Also hat die differenzierbare Funktion $v : U \longrightarrow \mathbb{C}$ überall Ableitung 0. Da U zusammenhängend ist, ist v konstant, also ist f konstant.
Das Argument für $\mathrm{Im}\, f =$ konstant ist analog. Alternativ könnten wir hier f durch if ersetzen, wodurch wir auf den ersten Fall reduziert hätten, denn dann gilt $\mathrm{Re}\, if =$ konstant.
Im Fall $|f| =$ konstant gilt offenbar auch $|f|^2 = u^2 + v^2 =$ konstant. Partielle Ableitung nach x, y ergibt

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Falls $|f| = 0$ ist, ist die Funktion sowieso konstant 0. Andernfalls verschwindet der Vektor $(u, v)^T$ für keinen Punkt $x + iy \in U$. Also folgt aus den Gleichungen oben, dass die Vektoren $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})^T$ und $(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})^T$ beide orthogonal zu diesem Vektor $(u, v)^T$ sind, und damit linear abhängig sein müssen. Also erfüllen sie

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Im letzten Schritt haben wir erneut die Cauchy-Riemann Gleichungen verwendet. Also müssen beide partiellen Ableitungen von u verschwinden. Somit ist u konstant und wir sind wieder im ersten Fall dieser Aufgabe.

Eine allgemeinere Herangehensweise an diese Aufgabe wäre zu zeigen, dass die Cauchy-Riemann Gleichungen implizieren, dass die Jacobi-Matrix einer analytischen Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ entweder verschwindet, oder vollen Rang 2 hat. Hat die Funktion f also irgendwo eine nicht-verschwindende Ableitung, folgt mit dem Satz der Umkehrfunktion schon, dass ihr Bild eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen enthält. Dies ist für keine der Mengen $\operatorname{Re} z =$ konstant, $\operatorname{Im} z =$ konstant oder $|z| =$ konstant erfüllt.

Aufgabe 3.

(i) Sei $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$. Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklung von A^2 bis zur Ordnung 5.

(ii) Zeige, dass $A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ für $|z| < 1$.

(iii) Wir definieren die Bernoullizahlen B_n durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Berechne B_n für $n \leq 4$.

(iv) Berechne die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Lösung. (i) Um die Entwicklung von A^2 bis zur Ordnung 5 berechnen wollen, müssen wir auch von A nur die Terme bis zur fünften Ordnung berücksichtigen. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A(z) \cdot A(z) &= (z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \mathcal{O}(|z|^5) \cdot (z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \mathcal{O}(|z|^5) \\
&= z^2 + (2+2)z^3 + (3 + 2 \cdot 2 + 3)z^4 + (4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4)z^5 + \mathcal{O}(|z|^6) \\
&= z^2 + 4z^3 + 10z^4 + 20z^5 + \mathcal{O}(|z|^6).
\end{aligned}$$

(ii) Wir verwenden die geometrische Reihe: für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

In der Tat hat diese Reihe Konvergenzradius 1 und man überprüft, dass das Produkt von $1 - z$ mit dieser Reihe gerade konstant 1 ist. Damit haben wir:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(1-z)^2} &= z \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = z \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) \\
&= z \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} 1 \right) \cdot 1 z^m \\
&= z \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) z^{m+1}.
\end{aligned}$$

Durch eine Indexverschiebung $m' = m + 1$ erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

(iii) Eine Möglichkeit, die Zahlen B_n zu bestimmen, wäre die Funktion $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ bis zu vier mal abzuleiten und dann an der Stelle 0 auszuwerten, denn es gilt gerade $B_n = f^{(n)}(0)$. Wir möchten hier eine andere Möglichkeit zeigen. Durch Betrachtung der Potenzreihe der Exponentialfunktion im Nenner erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{z}{e^z-1} &= \frac{z}{1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4\frac{1}{120}z^5+\mathcal{O}(|z|^6)-1}\\ &= \frac{z}{z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4\frac{1}{120}z^5+\mathcal{O}(|z|^6)}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{24}z^3\frac{1}{120}z^4+\mathcal{O}(|z|^5)}\end{aligned}$$

Wir möchten also gerade das Inverse der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$ berechnen. Hierfür setzen wir an

$$\begin{aligned}1 \overset{!}{=}&(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \mathcal{O}(|z|^5)) \cdot (1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{24}z^3 \frac{1}{120}z^4 + \mathcal{O}(|z|^5))\\ =&a_0 + (\frac{a_0}{2} + a_1)z + (\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2)z^2 + (\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{2} + a_3)z^3\\ &+(\frac{a_0}{120} + \frac{a_1}{24} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{2} + a_4)z^4 + \mathcal{O}(|z|^5).\end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned}a_0 &= 1,\\ a_1 &= -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2},\\ a_2 &= -\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},\\ a_3 &= -\frac{a_0}{24} - \frac{a_1}{6} - \frac{a_2}{2} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0,\\ a_4 &= -\frac{a_0}{120} - \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{6} - \frac{a_3}{2} = -\frac{1}{120} + \frac{1}{48} - \frac{1}{72} = -\frac{1}{720}.\end{aligned}$$

Mit $B_n = n! a_n$ ergibt sich $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$ und $B_4 = -\frac{1}{30}$.

(iv) Für grosse n gilt $1 \leq (\log n)^2 \leq n$, also folgt

$$1 = \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{(\log n)^2} \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Also ist $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{(\log n)^2} = 1$ und damit hat die Reihe Konvergenzradius $1/1 = 1$.
Für die zweite Reihe verwenden wir, dass nach der Stirling-Formel gilt:

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \longrightarrow 1 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Deshalb überlegt man sich, dass man in der Berechnung des Limes superior den Ausdruck $n!$ durch $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ ersetzen kann (da $\sqrt[n]{1} = 1$). Also haben wir

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} &= \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n}} \\
&= \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \\
&= \underbrace{\left(\limsup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}\right)}_{=1 \text{ wie oben}} \cdot \left(\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius gerade $1/(1/e) = e$.

⋆ **Aufgabe 4.** Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen auf dem Konvergenzradius, dass heisst für $|z| = 1$:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$

Hinweis: Test von Abel

⋆ **Aufgabe 5.** Versuche eine Definition der quaternionischen Ableitung analog zur komplexen Ableitung zu finden und untersuche die Funktion $f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $f(h) = h^2$ mit deiner Definition auf quaternionische Differenzierbarkeit.