Musterlösung zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Gibt es eine komplexe Wurzelfunktion? Genauer: Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \neq 0$? Hinweis: Zeige zuerst, dass eine solche Funktion so gewählt werden kann, dass sie $f(zw) = f(z)f(w)$ für alle $z, w \neq 0$ erfüllt.

Lösung. Quadriert man die im Hinweis erwähnte Gleichung $f(zw) = f(z)f(w)$ erhält man die korrekte Gleichung

$$zw = f(zw)^2 = f(z)^2 f(w)^2 = zw.$$

Deshalb ist die ursprüngliche Gleichung erfüllt bis auf Vorzeichen. Darum ist der Ausdruck $h(z,w) = f(zw)/(f(z)f(w))$ für alle $z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ entweder 1 oder -1. Da die Abbildung $\mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}, u \longmapsto 1/u$ stetig ist, hängt $h(z,w)$ stetig von z, w ab. Da zudem $\mathbb{C}\setminus\{0\} \times \mathbb{C}\setminus\{0\}$ zusammenhängend ist, muss die stetige Abbildung

$$h : \mathbb{C}\setminus\{0\} \times \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \{1, -1\}$$

konstant sein. Durch Multiplikation von f mit -1 können wir auf jeden Fall erreichen, dass $h = 1$ und damit die gewünschte Gleichung erfüllt ist.
Dann gilt aber:

$$1 = f(1)^2 = f(1)f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = f(-1)\cdot f(-1) = f(-1)^2 = -1,$$

ein Widerspruch.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ und $S = \{z \in \mathbb{C} \colon -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. Zeige, dass $\exp\colon S \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ eine bijektive Abbildung ist. Stelle die Umkehrfunktion explizit dar. Ist sie analytisch? (Eine solche Umkehrfunktion ist ein sogenannter *Zweig des Logarithmus*).

Lösung. In der Polardarstellung der komplexen Zahlen besteht die Menge $\mathbb{R}_{\leq 0}$ genau aus den Zahlen mit Argument $\pi + k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Das heisst dies sind die Zahlen, die in der Form $re^{i(\pi+k2\pi)}$ für $r \geq 0$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden können. Andererseits kann jede Zahl z im Komplement eindeutig als $z = re^{i\theta}$ geschrieben werden für $r = |z| \in (0, \infty)$ und $\theta \in (-\pi, \pi)$. Wir beobachten

$$z = re^{i\theta} = e^{\log(r)}e^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta}.$$

Der Logarithmus ist gerade eine Bijektion $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Das heisst, die Exponentialfunktion bildet die Menge $S = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$ bijektiv auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ ab. Über die obigen Argumente finden wir nun auch eine explizite Form der Umkehrfunktion g. Sie hat stets die Form

$$g(z) = \log(|z|) + i\theta(z),$$

wobei die Zahl $\theta(z)$ gerade das Argument von z zwischen $-\pi$ und π ist. Für θ gibt es getrennte Beschreibungen auf den Mengen $U_1 = \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}$, $U_2 = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und $U_3 = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, die $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ überdecken. Fixiere hierfür

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\theta(z) &= -\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right), \text{ für } z \in U_1 \\
\theta(z) &= \arcsin\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right), \text{ für } z \in U_2 \\
\theta(z) &= \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right), \text{ für } z \in U_3.
\end{aligned}$$

Man sieht damit, dass g stetig differenzierbar ist. Aus der Kettenregel für $f(g(z)) = z$ folgt $Df(g(z)) \cdot Dg(z) = \mathrm{id}$. Also gilt $Dg(z) = Df(g(z))^{-1}$. Nach den Cauchy-Riemann Gleichungen hat $Df(g(z))$ die Form

$$Df(g(z)) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \implies Dg(z) = Df(g(z))^{-1} = \frac{1}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir sofort ab, dass auch $Dg(z)$ die von den Cauchy-Riemann Gleichungen vorgegebene Form hat, also g analytisch ist.

Aufgabe 3. Sei

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}.$$

Zeige:

(i) Die Funktion f ist analytisch auf $B_1(0) = \{z \colon |z| < 1\}$ mit Ableitung $f'(z) = \frac{1}{1+z}$.

(ii) $e^{f(z)} = 1 + z$ für alle $z \in B_1(0)$.

Lösung. (i) Nach Satz 4 der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass die Potenzreihe Konvergenzradius mindestens 1 hat, um zu beweisen, dass f analytisch ist. Tatsächlich gilt

$$1/R = \limsup_{k \longrightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|} = \frac{1}{\liminf_{k \longrightarrow \infty} \sqrt[k]{k}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Wieder mit Satz 4 folgt dann auch

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{kz^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-z)^{k-1} = \frac{1}{1 - (-z)} = \frac{1}{1 + z}.$$

Hier verwenden wir die geometrische Reihe.

(ii) Da $z \in B_1(0)$, dürfen wir die zu zeigende Gleichung durch $1+z$ teilen, wollen also beweisen

$$g(z) = \frac{e^{f(z)}}{1+z} = 1$$

Leiten wir die linke Seite mit Quotientenregel ab, so erhalten wir

$$g'(z) = \frac{e^{f(z)} f'(z)(1+z) - e^{f(z)}}{(1+z)^2} = \frac{e^{f(z)} \cdot 1 - e^{f(z)}}{(1+z)^2} = 0.$$

Also ist g konstant, da $B_1(0)$ zusammenhängend ist, und da $g(0) = e^0/1 = 1$ gilt $g(z) = 1$ wie gefordert.

Aufgabe 4. Gibt es eine komplexe Logarithmusfunktion, das heisst eine stetige Funktion $l\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Hinweis: Aufgabe 1.

Lösung. Gäbe es eine solche Funktion l, wäre die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \longmapsto \exp\left(\frac{l(z)}{2}\right)$$

eine stetige komplexe Wurzelfunktion. Tatsächlich gilt:

$$f(z)^2 = \exp\left(\frac{l(z)}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{l(z)}{2}\right) = \exp\left(\frac{l(z)}{2} + \frac{l(z)}{2}\right) = \exp(l(z)) = z.$$

Dies ist ein Widerspruch zu Aufgabe 1.

Aufgabe 5. Zeige, dass $u\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$ zwar harmonisch ist, aber keine harmonisch konjugierte Funktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat.

Lösung. Die Funktion u ist harmonisch, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(-y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

also folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Wäre u der Realteil einer holomorphen Funktion $f = u + iv$, so würde für $z = x + iy$ gelten:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{2x - 2iy}{x^2 + y^2} = 2\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{2}{z}. \end{aligned}$$

Dann aber hätte die Funktion $1/z$ die Stammfunktion $f/2$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wie in der Vorlesung gezeigt ist dies ein Widerspruch zu dem nicht-Verschwinden des Kurvenintegrals

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Alternative Lösung: Gäbe es eine holomorphe Funktion f mit $\mathrm{Re}(f) = u$, dann wäre die Funktion $\exp \circ f$ auch holomorph und hätte Absolutbetrag

$$|\exp(f(z))| = |\exp(\mathrm{Re}(f))| \underbrace{|\exp(i\mathrm{Im}(f))|}_{=1} = \exp(\log(\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2)) = |z|^2.$$

Also hätte die Funktion $g(z) = \exp(f(z))/z^2$ konstanten Betrag 1. Damit wäre sie aber nach Serie 3, Aufgabe 2 konstant gleich c mit $|c| = 1$. Also gilt $\exp(f(z)) = cz^2$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ist $c = \exp(i\theta)$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$, dann erfüllt die Funktion $\tilde{f}(z) = (f(z) - i\theta)/2$ gerade

$$\exp(\tilde{f}(z))^2 = \exp(f(z) - i\theta) = z^2.$$

Also ist $\exp(\tilde{f}(z))/z = \pm 1$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und auch stetig. Durch Addition von $i\pi$ können wir erreichen, dass dieser Quotient konstant 1 ist. Also wäre $\tilde{f}$ ein Beispiel für eine Funktion wie in Aufgabe 1. Dies ist ein Widerspruch.

$\star$ **Aufgabe 6.** Die Formeln

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

sind sehr bekannt. Zeige allgemein, dass für $r \geq 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} n^r = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} B_k (N+1)^{r+1-k},$$

wobei B_k die durch

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

gegebenen Bernoullizahlen sind. Hinweis: Betrachte $\sum_{i=0}^{N} \exp(iz)$.

Lösung. Den im Hinweis vorgeschlagenen Term können wir einerseits ausschreiben als

$$\sum_{k=0}^{N} \exp(kz) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(kz)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(kz)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{N} k^r) \frac{z^r}{r!}$$

Wenn wir die Summe aber zuerst als endliche geometrische Reihe betrachten, erkennen wir die Erzeugendenfunktion der Bernoullizahlen.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \exp(kz) &= \frac{\exp((N+1)z) - 1}{\exp(z) - 1} = \frac{z}{\exp(z) - 1} \frac{\exp((N+1)z) - 1}{z} \\ &= (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k)(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+1)^{k+1}}{(k+1)!} z^k) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} \frac{B_k (N+1)^{r+1-k}}{k!(r+1-k)!} z^p \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \frac{(r+1)r!}{k!(r+1-k)!} B_k (N+1)^{r+1-k} \Big) \frac{z^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} B_k (N+1)^{r+1-k} \Big) \frac{z^r}{r!}\end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Formel verwendet haben, um die Summen miteinander zu verrechnen. Nun folgt mit Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{k=0}^{N} k^r = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} B_k (N+1)^{r+1-k}$$

(Justus Kohlhaas)