Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt, C. Schießl

FUNKTIONENTHEORIE

20. Oktober 17
HS 2017

Musterlösung zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$. Sei γ der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $a+bi$, $a-bi$, $-a+bi$, $-a-bi$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinne (gegen den Uhrzeigersinn). Berechne

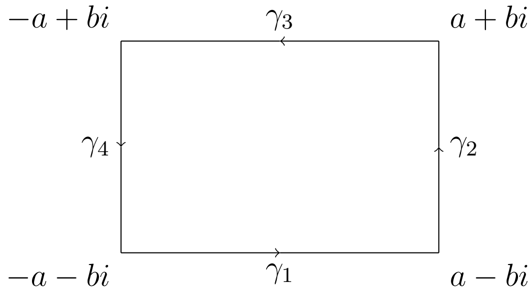
(i)

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz$$

(ii)

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

Lösung. Wir parametrisieren den Rand des Rechtecks mit vier Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ wie folgt:



Explizit können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto t - bi, & \gamma' &= 1\\
\gamma_2 &: [-b, b] \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto a + ti, & \gamma' &= i\\
\gamma_3 &: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto -t + bi, & \gamma' &= -1\\
\gamma_4 &: [-b, b] \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto -a - ti, & \gamma' &= -i
\end{aligned}$$

(i) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \bar{z} dz &= \int_{-a}^{a} (t + bi) \cdot 1 dt = 2abi,\\
\int_{\gamma_2} \bar{z} dz &= \int_{-b}^{b} (a - ti) \cdot i dt = 2abi,\\
\int_{\gamma_3} \bar{z} dz &= \int_{-a}^{a} (-t - bi) \cdot (-1) dt = 2abi,\\
\int_{\gamma_4} \bar{z} dz &= \int_{-b}^{b} (-a + ti) \cdot (-i) dt = 2abi.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$\int_\gamma \bar{z} dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \bar{z} dz = 8abi.$$

Beachte, dass dies gerade $2iF(R)$ ist, wobei $F(R) = (2a)\cdot(2b)$ die Fläche des Rechtecks ist. Darum stimmt das Ergebnis mit der Formel aus der letzten Aufgabe dieses Blattes überein (auch wenn hier der Rand des Rechtecks nicht glatt ist).

(ii) Für das Integral verwenden wir die Formel $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$. So ergibt sich für das Integral über γ_1:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} &= \int_{-a}^{a} \frac{t+bi}{t^2+b^2} dt \\
&= \int_{-a}^{a} \underbrace{\frac{t}{t^2+b^2}}_{\text{ungerade Funktion}} dt + bi \int_{-a}^{a} \frac{1}{t^2+b^2} dt \\
&= 0 + bi \left(\frac{\arctan\left(\frac{a}{b}\right)}{b} - \frac{\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)}{b} \right) = i\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right) - \arctan\left(\frac{-a}{b}\right)\right).
\end{aligned}$$

Beachte, dass dies genau i mal der Winkel ist, den die komplexen Zahlen $-a-bi$ und $a-bi$ einschliessen. Durch ähnliche Rechnungen findet man, dass man für alle Kurven γ_i gerade i mal den Winkel von Start- zu Endpunkt von γ_i erhält. Zusammen ergibt sich

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

da die Kurven genau einmal um den Punkt 0 herumlaufen. Beachte, dass dies das gleiche Ergebnis ist wie für das Kurvenintegral bezüglich des Kreises mit Radius r.

Aufgabe 2. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $\partial B_R(a)$ der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $R > 0$ (im Gegenuhrzeigersinn orientiert). Zeige:

$$\int_{\partial B_R(a)} P(\overline{z})\, dz = 2\pi i R^2 P'(\bar{a})$$

Lösung. Da beide Seiten der gewünschten Gleichung $\mathbb{C}$-linear im Polynom P sind, genügt es, die Aussage für alle Elemente P einer Basis des Vektorraums $\mathbb{C}[X]$ zu zeigen. Statt der üblichen Basis $1, X, X^2, \ldots$ nehmen wir die Basis

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X - \bar{a}, P_2(X) = (X-\bar{a})^2, P_3(X) = (X-\bar{a})^3, \ldots.$$

Damit haben wir nämlich

$$P_k'(\bar{a}) = \begin{cases} 1, & \text{für } k = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Parametrisieren wir nun $\gamma = \partial B_R(a)$ durch $\gamma(t) = a + Re^{it}$, so können wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P_k(\bar{z})dz &= \int_0^{2\pi} (\overline{a + Re^{it}} - \bar{a})^k \cdot Rie^{it}dz \\
&= \int_0^{2\pi} (Re^{-it})^k \cdot Rie^{it}dz \\
&= \int_0^{2\pi} R^{k+1}e^{it(1-k)}dz \\
&= \begin{cases} \int_0^{2\pi} R^2e^0dz = 2\pi iR^2 & \text{, für } k = 1 \\ \frac{R^{k+1}}{i(1-k)}e^{it(1-k)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{R^{k+1}}{i(1-k)}\left(e^{2\pi i(1-k)} - 1\right) = 0 & \text{, sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Ausdruck für P_k' oben zeigt, dass die gewünschte Formel für alle P_k erfüllt ist.

Aufgabe 3. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiere die Länge von γ als

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt.$$

Hier bezeichnet $\|\ \|$ die übliche euklidische Norm. Unter der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ergibt dies gerade die Definition von Kurvenlänge aus der Vorlesung.

(i) Zeige, dass die Bogenlänge einer Kurve von der Parametrisierung unabhängig ist, das heisst für eine Umparametrisierung $\phi : [\hat{a}, \hat{b}] \to [a, b]$ gilt $l(\gamma) = l(\gamma \circ \phi)$.

(ii) Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte und ist $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve von p nach q, so gilt $\|p - q\| \le l(\gamma)$.
Hinweis: Falls $p \neq q$ betrachte das Integral

$$\int_a^b \gamma'(t) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|}dt.$$

Hier ist $\cdot$ das Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$.

Lösung. (i) Sei $\phi : [\hat{a}, \hat{b}] \to [a, b]$ eine Umparametrisierung, also $\phi(\hat{a}) = a$, $\phi(\hat{b}) = b$ und $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
l(\gamma \circ \phi) &= \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \|(\gamma \circ \phi)'(t)\|dt \\
&= \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \|\gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\|dt \\
&= \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \|\gamma'(\phi(t))\| \cdot \phi'(t)dt
\end{aligned}$$

Hier verwenden wir $\phi'(t) > 0$. Mit der Substitution $s = \phi(t)$, also $ds = \phi'(t)dt$, erhalten wir

$$l(\gamma \circ \phi) = \int_a^b \|\gamma'(s)\|ds = l(\gamma).$$

(ii) Beachte zunächst

$$\int_a^b \gamma'(t)dt = \gamma(t)|_a^b = \gamma(b) - \gamma(a) = q - p. \tag{1}$$

Für $p = q$ ist die zu zeigende Aussage klar, da die linke Seite der Ungleichung 0 ist. Andernfalls können wir das Skalarprodukt der obigen Gleichung mit dem Einheitsvektor $(q-p)/\|q-p\| = v$ nehmen.

Behauptung: Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $\eta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$v \cdot \int_a^b \eta(t)dt = \int_a^b v \cdot \eta(t)dt.$$

Beweis: Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ die Zerlegung in Komponenten von v und η. Dann gilt

$$\begin{aligned} v \cdot \int_a^b \eta(t)dt &= \sum_{i=1}^n v_i \int_a^b \eta_i(t)dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n v_i \eta_i(t)dt \\ &= \int_a^b v \cdot \eta(t)dt, \end{aligned}$$

wobei wir nur die normale $\mathbb{R}$-Linearität des Riemannintegrals verwendet haben. Wenden wir dies auf das Skalarprodukt der Gleichung (1) mit $v = (q-p)/\|q-p\|$ an, ergibt sich

$$\begin{aligned} \|q-p\| = v \cdot (q-p) = v \cdot \int_a^b \gamma'(t)dt \\ = \int_a^b v \cdot \gamma'(t)dt. \end{aligned}$$

Da auf der linken Seite der Gleichung eine nichtnegative Zahl steht, können wir auf der rechten Seite den Betrag nehmen. Indem wir die Standardabschätzung für den Betrag eines Integrals sowie die Cauchy-Schwarz Ungleichung verwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|q-p\| = \left| \int_a^b v \cdot \gamma'(t)dt \right| &\le \int_a^b |v \cdot \gamma'(t)|dt \\ &\le \int_a^b \underbrace{\|v\|}_{=1} \|\gamma'(t)\|dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = l(\gamma). \end{aligned}$$

⋆ **Aufgabe 4.** Sei D ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂D. Zeige, dass

$$\int_{\partial D} \overline{z}\, dz = 2iF(D),$$

wobei $F(D)$ der Flächeninhalt von D ist.