# Musterlösung zu Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** (i) (Quotientenkriterium) Sei $\sum a_i z^i$ eine Potenzreihe mit $a_i \neq 0$ für $i \gg 0$. Zeige, dass dann

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right|$$

den Konvergenzradius berechnet, falls dieser Grenzwert existiert.

(ii) Finde ein Beispiel, wo das Wurzelkriterium, aber nicht das Quotientenkriterium anwendbar ist.

**Lösung.** Das findet sich in jedem Analysisbuch.

**Aufgabe 2.** Zeige, dass $\sin \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ surjektiv ist.

**Lösung.** Es ist

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

und daher sin die Komposition der surjektiven Abbildungen $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow iz$, $z \longrightarrow e^z$ und $z \longrightarrow \frac{z - z^{-1}}{2i}$. Die letzte Abbildung ist surjektiv, weil jede quadratische Gleichung eine Lösung in $\mathbb{C}$ hat.

**Aufgabe 3.** (i) Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Sei $\phi$ eine $C^1$-Homotopie (mit festen Endpunkten) in $U$ zwischen den Kurven

$$\gamma, \widehat{\gamma} : [0,1] \longrightarrow U.$$

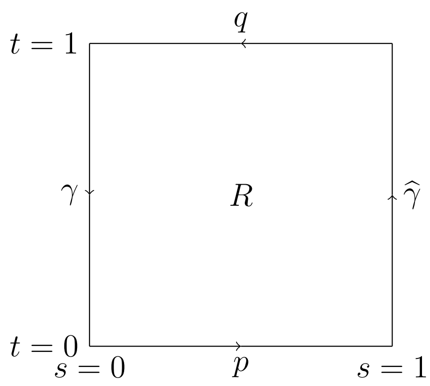
Beweise, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz.$$

(ii) Sei $f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $\gamma$ eine geschlossene Kurve. Zeige, dass $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

(iii) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet (das heisst es existiert ein $z_0 \in U$ so dass für jedes $z \in U$ das Liniensegment von $z_0$ nach $z$ vollständig in $U$ liegt). Sei auch $\gamma$ eine geschlossene Kurve in $U$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Zeige, dass $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

**Lösung.** (i) Nach Definition einer $C^1$-Homotopie sieht $\phi$ auf dem Rand von $R = [0,1] \times [0,1]$ gerade wie folgt aus:




Nach dem Satz von Cauchy für Bilder von Rechteckflächen unter $C^1$-Abbildungen ist das Kurvenintegral von $f$ entlang $\phi \circ \partial R$ gerade gleich 0. Da zudem die Kurve $\phi \circ \partial R$ entlang der Stücke $t = 0$ und $t = 1$ konstant ist, ist das Integral über diese Teilstücke gleich 0. Bemerke zuletzt, dass die Kurve $\gamma$ auf dem Stück $s = 0$ in umgekehrter Richtung durchlaufen wird, was das Vorzeichen des Kurvenintegrals umkehrt. Zusammen haben wir

$$0 = \int_{\phi \circ \partial R} f(z)dz = \int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

(ii) Der zweite Aufgabenteil folgt aus dem dritten, da $\mathbb{C}$ sternförmig ist. In diesem Fall können wir aber auch direkt den ersten Aufgabenteil verwenden: da $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ geschlossen ist, gilt $p = \gamma(0) = \gamma(1) = q$. Damit ist die Funktion

$$\phi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, (s,t) \longmapsto (1-s)\gamma(t) + s \cdot p$$

stetig differenzierbar und man sieht leicht, dass sie eine Homotopie von der Kurve $\gamma$ zur konstanten Kurve $p$ ist. Da das Integral über $f$ entlang dieser verschwindet, verschwindet auch das Integral entlang $\gamma$.

(iii) Sei $U$ sternförmig bezüglich des Punktes $z_0 \in U$. Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ eine geschlossene Kurve mit $p = \gamma(0) = \gamma(1)$. Dann betrachte die folgende Funktion:

$$Q : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, (s,t) \longmapsto (1-s)\gamma(t) + sz_0.$$

Da $\gamma$ stetig differenzierbar ist, sieht man leicht, dass auch $Q$ stetig differenzierbar ist. Für ein festes $t$ parametrisiert die Abbildung $s \longmapsto Q(s,t)$ gerade das Liniensegment von $\gamma(t)$ nach $z_0$, das nach Voraussetzung vollständig in $U$ enthalten ist. Also hat die Funktion $Q$ Werte in $U$. Da $R = [0,1] \times [0,1]$ ein Rechteckgebiet ist, ist also laut Vorlesung

$$\int_{Q \circ \partial R} f(z)dz = 0.$$

Betrachten wir nun die vier Randstücke von $R$ getrennt: wie oben gesehen parametrisiert das Stück $t = 0$ gerade die Strecke $\overrightarrow{pz_0}$ von $\gamma(0) = p$ nach $z_0$, das Stück $t = 1$ die Strecke $\overrightarrow{z_0 p}$ von $z_0$ nach $\gamma(1) = p$. Für $s = 1$ ist $Q(s,t)$ gerade konstant $z_0$, für $s = 0$ wird gerade die Kurve $\gamma$ (in umgekehrter Richtung) durchlaufen. Da sich die beiden gegenläufigen Strecken zwischen $p$ und $z_0$ gerade gegenseitig aufheben und das Integral über die konstante Kurve verschwindet, ergibt sich:

$$0 = \int_{Q \circ \partial R} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

**Aufgabe 4.** Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion in einer Umgebung $U$ von $z = 0$. Zeige, dass

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i f(0).$$

**Lösung.** Mit der Definition des Kurvenintegral und der Standardabschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}\left| \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z} dz - 2\pi i f(0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} (f(re^{it}) - f(0)) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)| dt \xrightarrow{r \longrightarrow 0} 0\end{aligned}$$