Musterlösung zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Berechne

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$$

für
(a) $C = \{z : |z - 2| = 1\}$
(b) $C = \{z : |z - 2| = 3\}$
(c) $C = \{z : |z - 2| = 5\}$
Hinweis: Partialbruchzerlegung

Lösung. Die Funktion $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ ist definiert für $z^2 - 6z = z(z-6) \neq 0$, also $z \neq 0, 6$.
(a) Da f in einer Umgebung der Kreisscheibe $\overline{B}(2,1)$, die von C eingeschlossen wird, eine holomorphe Funktion definiert, ist das Integral gleich 0 nach dem Cauchyschen Integralsatz.
(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz &= \int_C \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz \\ &= 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6}|_{z=0} = \frac{-i\pi}{3}\end{aligned}$$

Hier verwenden wir die Cauchyformel für die holomorphe Funktion $\frac{e^{z^2}}{z-6}$ auf $B(2,3)$.
(c) Wir berechnen eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{6}{z^2 - 6z} = \frac{1}{z-6} - \frac{1}{z}$$

und

$$6 \int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} \mathrm{d}z = \int_C \frac{e^{z^2}}{z-6} - \int_C \frac{e^{z^2}}{z} \mathrm{d}z = 2i\pi(e^{36} - 1).$$

Aufgabe 2. (a) Für $R > 0$ definiere man $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0, |z| < R\}$. Zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}.$$

(b) Zeige, dass für $R > 1$ das Integral

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}$$

von R unabhängig ist.

(c) Verwende den Integralsatz und die Integralformel von Cauchy sowie Partialbruchzerlegung, um für grosse R

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

zu berechnen.

Lösung. (a) Sei $R > 0$. Dann ist $\partial D_R = [-R,\, R] \cup \gamma_R$, wobei γ_R die Menge $\{R\cos t + iR\sin t \,:\, t \in [0,\, \pi]\}$ bezeichnet. Es gilt für das Integral

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} + \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

Dann hat man

$$\left| \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} - \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \right| \leq \left(\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} \right|.$$

Aber für $R > 1$ hat man die Abschätzung $\left|\frac{1}{z^4+1}\right| \leq \frac{1}{R^4-1}$. Somit ist

$$\left| \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} - \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \right| \leq \frac{\ell(\gamma_R)}{R^4-1} = \frac{\pi R}{R^4-1}.$$

Im Limes $R \longrightarrow \infty$ bedeutet dies:

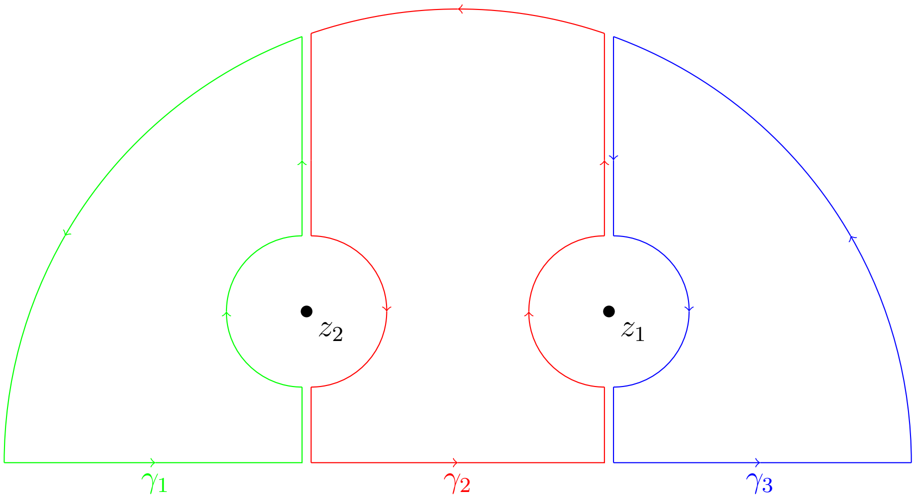
$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}.$$

Man kann durch Vergleich mit der Funktion $t \longmapsto t^{-4}$ für $|t| \geq 1$ leicht überprüfen, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$ konvergiert. Wir zeigen jetzt, dass der andere Grenzwert auch existiert.

(b) Die Gleichung $z^4 + 1 = 0$ hat zwei Lösungen mit positivem Imaginärteil, nämlich $z_1 = e^{i\pi/4}$ und $z_2 = e^{i3\pi/4}$. An diesen Punkten ist der Integrand nicht definiert. Wenn $R > 1$ ist, dann sind z_1 und z_2 in $int(D)$. Seien ε eine positive Zahl, für welche $B_i := B(z_i, \epsilon) \subset D_R$ ist (für $i = 1, 2$).
Behauptung: Dann gilt

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} + \int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

Beweis: Betrachte das folgende Schaubild:



Für jede der drei Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ findet man eine sternförmige offene Menge in $\mathbb{C}$, die diese enthält und auf der $\frac{1}{z^4+1}$ definiert ist. Deshalb gilt

$$\int_{\gamma_i} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Die drei Kurven zusammen durchlaufen aber gerade den Rand ∂D_R in mathematisch positiver Richtung und die beiden Kreise $\partial B_1, \partial B_2$ in mathematisch negativer Richtung. Die vertikalen Verbindungsstücke im Inneren von D_R heben sich gerade gegenseitig auf. Zusammen ergibt sich:

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z^4+1} = \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} - \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} - \int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

Die beiden Integrale über ∂B_i sind aber tatsächlich unabhängig von R. Aus diesem Grund ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} + \int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

(c) Nach Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-i3\pi/4}}{z - e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/4}}{z - e^{i3\pi/4}} + \frac{e^{i3\pi/4}}{z - e^{-i\pi/4}} + \frac{e^{i\pi/4}}{z - e^{-i3\pi/4}} \right)$$

Dann sind nach den Cauchy'schen Integralsatz und Integralformel

$$\int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \frac{1}{4} \int_{\partial B_1} \frac{e^{-i3\pi/4}}{z - e^{i\pi/4}} \,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{2} e^{-i3\pi/4} \quad \text{und}$$

$$\int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \frac{1}{4} \int_{\partial B_2} \frac{e^{-i\pi/4}}{z - e^{i3\pi/4}} \,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{2} e^{-i\pi/4} \quad .$$

Somit ist also

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \frac{\pi i}{2} \left(e^{-i3\pi/4} + e^{-i\pi/4} \right) = \frac{\pi i}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - i + 1 - i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und der Kreisring $\{a \in \mathbb{C} \colon r \leq |z-a| \leq R\}$ in U. Sei $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Zeige, dass $\int_{\partial B(a,r)} f(z)\,dz = \int_{\partial B(a,R)} f(z)\,dz$.

Lösung. Wende Cauchy auf folgendes Bild eines Rechtecks an:

$$(s,t) \longmapsto a + (r(1-s) + Rs)e^{2\pi i t}$$

$\star$ **Aufgabe 4.** Sei f analytisch auf $B(z_o, r)$ für $r > 0$, mit $f(z_0) = 0$ aber $f'(z_0) \neq 0$. Man zeige für genügend kleine ϵ, dass

$$\int_{\partial B(z_0,\epsilon)} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

gilt.
Hinweis: Betrachte noch einmal den Beweis der Cauchy-Integralformel.