Musterlösung zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (Integralformel von Cauchy) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Sei $z_0 \in U$ und $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\{z\colon |z - z_0| \leq r\} \subset U$. Zeige, dass dann

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

für jedes a im Inneren des Kreises $|z - z_0| < r$. Hinweis: Wurde in der Vorlesung beim Satz von der Potenzreihenentwicklung schon fast bewiesen

Lösung. Jedes Buch über Funktionentheorie.

Aufgabe 2. Berechne für $a, b \in \mathbb{C}$ und $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Integral

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$$

in Abhängigkeit von r. **Beachte:** Für welche r ist das Integral definiert?

Lösung. Die Funktion $h(z) = 1/((z-a)^n(z-b)^m)$ ist definiert auf $\mathbb{C} \smallsetminus \{a, b\}$. Die Kurve $\{|z| = r\} = \partial B(0, r)$ liegt in dieser Menge für $r \in (0, \infty) \smallsetminus \{|a|, |b|\}$. Also ist das Kurvenintegral für diese Werte von r definiert.
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|a| \leq |b|$. Für $0 \leq r < |a|$ liegen a, b ausserhalb von $B(0, r)$, also verschwindet das Kurvenintegral nach dem Satz von Cauchy. Sei also $r > |a|$.
Fall 1: $a = b$
Hier können wir direkt die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^{n+m}} = \frac{2\pi i}{(n+m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+m-1} 1\Big|_{z=a} = 0,$$

da $m, n \geq 1$, also $n + m - 1 \geq 1$.
Fall 2: $a \neq b$
Hier müssen wir zwei Unterfälle betrachten. Falls $|a| < r < |b|$ gilt, liegt genau a im von $\partial B(0, r)$ umschlossenen Kreis. Deshalb können wir die Cauchyformel anwenden auf die innerhalb des Kreises analytische Funktion $1/(z - b)^m$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=r} \frac{(z-b)^{-m}}{(z-a)^n} dz &= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z-b)^{-m}\Big|_{z=a} \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!} (-m)(-m-1)\cdots(-m-(n-2))(z-b)^{-m-(n-1)}\Big|_{z=a} \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!} (a-b)^{-m-(n-1)} \\
&= \frac{2\pi i}{(a-b)^{m+n-1}} (-1)^{n-1} \binom{m+n-2}{m-1}.
\end{aligned}$$

Falls dagegen $r > |b|$ liegen sowohl a als auch b in der Kreisscheibe $B(0,r)$. Analog zur Lösung von Aufgabe 2b auf Serie 7 können wir durch Unterteilung der Kreisscheibe zeigen, dass das Kurvenintegral von $h(z)$ entlang $\partial B(0,r)$ genau gleich der Summe der Integrale von h entlang $\partial B(a,\epsilon)$ und $\partial B(b,\epsilon)$ für genügend kleine $\epsilon > 0$ ist. Für das Integral um a erhalten wir mit der Cauchyformel genau das Resultat von oben. Für das Integral um b können wir dieselbe Rechnung machen, oder einfach die Rollen von a, b bzw. m, n tauschen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} \frac{(z-b)^{-m}}{(z-a)^n} dz &= \frac{2\pi i}{(a-b)^{m+n-1}}(-1)^{n-1}\binom{m+n-2}{m-1} + \frac{2\pi i}{(b-a)^{m+n-1}}(-1)^{m-1}\binom{m+n-2}{n-1} \\ &= \frac{2\pi i}{(a-b)^{m+n-1}}\binom{m+n-2}{m-1}\left((-1)^{n-1} + \underbrace{(-1)^{m+n-1}(-1)^{m-1}}_{=(-1)^n}\right) = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeige

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\, dt = \frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

durch Auswertung des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz.$$

Lösung. Wir berechnen das obige komplexe Kurvenintegral auf zwei verschiedene Arten. Einerseits können wir direkt die Definition anwenden. Der Einheitskreis wird parametrisiert durch $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}\left(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\right)^{2n} \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\left(e^{it} + e^{-it}\right)^{2n} ie^{it}\, dt \\ &= i\int_0^{2\pi} 2^{2n}\left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right)^{2n} dt \\ &= i2^{2n}\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2n}\, dt.\end{aligned}$$

Andererseits können wir den Integranden vereinfachen und dann die Cauchy-Formel anwenden.

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz &= \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\, dz \\ &= \frac{2\pi i}{(2n)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2n} (z^2+1)^{2n}\Big|_{z=0}\end{aligned}$$

Um die $(2n)$-te Ableitung von $(z^2+1)^{2n}$ zu berechnen, verwenden wir den Binomischen Lehrsatz:

$$(z^2+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(z^2)^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{2k}.$$

Die $(2n)$-te Ableitung aller vorkommenden Potenzen von z verschwindet, ausser für die Potenz z^{2n}. Also nehmen wir genau den Term $k = n$ aus der obigen Summe und erhalten

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz = \frac{2\pi i}{(2n)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2n}\binom{2n}{n} z^{2n}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(2n)!}\binom{2n}{n}(2n)! = 2\pi i\binom{2n}{n}.$$

Vergleicht man die Formel oben mit diesem Ergebnis folgt das gewünschte Resultat.

Aufgabe 4.
(i) Gibt es beschränkte, nicht-konstante, analytische Funktionen $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$?
(ii) Gibt es ganze, nicht-konstante Funktionen $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit beschränktem Realteil?

Lösung. (i) Sei $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte, analytische Funktion, dann ist $g \circ \exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ auch beschränkt und analytisch, also konstant nach dem Satz von Liouville. Da exp surjektiv ist, muss dann auch g konstant gewesen sein.
(ii) Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit beschränktem Realteil. Dann ist $\exp \circ f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkt, denn $|\exp \circ f| = \exp \circ \mathrm{Re}(f)$. Also ist $\exp \circ f$ konstant gleich $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Schreibe $c = \exp(\tilde{c})$ für ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$. Dann muss gelten $f(z) \in \tilde{c} + 2\pi i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da diese Menge diskret ist und da f stetig und $\mathbb{C}$ zusammenhängend sind, ist f also konstant.

Aufgabe 5. Berechne

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz.$$

Lösung. Seien

$$\Gamma = \int_C \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz$$

und

$$g(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2}.$$

Wenn $|\zeta - 1| < 1$ gilt

$$g(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{g(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z \text{ und } g'(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{g(z)}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Für $\zeta = 1$ erhalten wir also

$$\Gamma = \int_C \frac{g(z)}{(z-1)^2} dz = 2i\pi g'(1) = \frac{-i\pi^2}{2}.$$

Aufgabe 6. Arbeite die in der Vorlesung gemachten Abschätzungen für Polynome aus: Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad n. Dann existieren $C_1, C_2, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$C_1|z|^n < |p(z)| < C_2|z|^n$$

für $|z| > \delta$.

Aufgabe 7. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und $p(z)$ ein Polynom von Grad n, sodass $|f(z)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Hinweis: Cauchy-Abschätzungen.

Lösung. Wir wollen die Cauchy-Abschätzungen verwenden. Da f eine ganze Funktion ist, ist sie überall durch ihre Potenzreihenentwicklung um 0 beschrieben, also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

für Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$. Die zu zeigende Aussage ist äquivalent dazu, dass $a_k = 0$ für $k > n$. Sei $p(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0$ mit $b_n \neq 0$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|p(z)| \leq |b_n z^n| + |b_{n-1} z^{n-1}| + \ldots + |b_0| = |b_n| R^n + |b_{n-1}| R^{n-1} + \ldots + |b_0|.$$

Für genügend grosse R ist die rechte Seite kleiner als $(|b_n| + 1)R^n$. Also gilt laut Cauchy-Abschätzung

$$|a_k| \leq \frac{(|b_n| + 1)R^n}{R^k} = (|b_n| + 1)R^{n-k}.$$

Für $k > n$ geht die rechte Seite mit $R \longrightarrow \infty$ gegen 0, also $a_k = 0$ wie gewünscht.