Musterlösung zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

(i) Sei $p(z) = z^n + e_1 z^{n-1} + \cdots + e_{n-1}z + e_n$ ein normiertes Polynom von Grad n mit Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ (eine d-fache Nullstelle kommt in dieser Liste also d Mal vor). Zeige:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \\ e_2 &= \sum_{i<j} \zeta_i \zeta_j \\ e_3 &= -\sum_{i<j<k} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \\ &\ldots \\ e_n &= (-1)^n \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n \end{aligned}$$

(ii) Sei $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine n-te Einheitswurzel. Berechne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k \qquad\qquad \prod_{k=0}^{n-1} \epsilon^k$$

Lösung.

(i) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra lässt sich p als ein Produkt von Linearfaktoren schreiben. In der Tat hat p eine Nullstelle $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ und Polynomdivision von p durch $(z - \zeta_1)$ ergibt ein normiertes Polynom q vom Grad $n-1$ mit $p(z) = (z-\zeta_1)q(z)$. Nach Induktion kann dann q geschrieben werden als Produkt $q(z) = (z-\zeta_2)(z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_n)$. Wir sehen also

$$p(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)(z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_n).$$

In der Tat sind die gefundenen Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ auch genau die Nullstellen von p (gezählt mit Vielfachheit) aus der Aufgabenstellung.
Schreibt man das Produkt oben aus, ergeben sich genau 2^n Terme, denn von jedem der Faktoren können wir entweder den Summanden z oder den Summanden $-\zeta_j$ auswählen. Deshalb ist für $k = 1, \ldots, n$ der Summand $e_k z^{n-k}$ von $p(z)$ genau die Summe aller solcher Produkte, wo wir $n-k$ Mal z gewählt haben und k der Zahlen ζ_j. Also folgt

$$e_k z^{n-k} = \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_k} (-\zeta_{j_1})(-\zeta_{j_2})\cdots(-\zeta_{j_k}) z^{n-k} = \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_k} (-1)^k \zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\cdots\zeta_{j_k} z^{n-k}.$$

Ein Koeffizientenvergleich gibt die gewünschte Formel.

(ii) Die Zahlen ϵ^k für $k = 0, \ldots, n-1$ sind alle Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^n - 1$, denn

$$\left(\epsilon^k\right)^n - 1 = e^{\frac{2\pi i}{n}kn} - 1 = e^{2\pi ik} - 1 = 0.$$

Da dies schon n verschiedene Zahlen sind (beachte die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen), müssen es alle Nullstellen von p sein. Mit dem vorigen Aufgabenteil erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k = -e_1 = \begin{cases} 1 & , \text{ für } n = 1 \\ 0 & , \text{ für } n > 1 \end{cases}$$
$$\prod_{k=0}^{n-1} \epsilon^k = (-1)^n e_n = (-1)^{n+1}.$$

Aufgabe 2. (i) Berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktionen e^z und $1/z$ um $z = 1$ bis zur Ordnung 3.

(ii) Leite daraus die Potenzreihenentwicklung von e^z/z um $z = 1$ bis zur Ordnung 3 her.

(iii) Berechne

$$\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz.$$

Lösung. (i) Es gilt $(\frac{d}{dz})^n e^z = e^z$ für alle $n \geq 0$, also ist die Potenzreihenentwicklung gerade

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(z-1)^k = e + e(z-1) + \frac{e}{2}(z-1)^2 + \frac{e}{6}(z-1)^3 + \mathcal{O}(|z-1|^4).$$

Per Induktion zeigt man $(\frac{d}{dz})^n z^{-1} = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$, also ergibt sich

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!}(z-1)^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\mathcal{O}(|z-1|^4).$$

Dies kann man auch einfacher über die geometrische Reihe sehen

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k.$$

(ii) Wir multiplizieren die beiden Potenzreihen nach der Cauchy-Produktformel

$$\begin{aligned}
&\left(e + e(z-1) + \frac{e}{2}(z-1)^2 + \frac{e}{6}(z-1)^3 + \mathcal{O}(|z-1|^4)\right) \\
&\cdot \left(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + +\mathcal{O}(|z-1|^4)\right) \\
=& e + (-e+e)(z-1) + (e - e + \frac{e}{2})(z-1)^2 + (-e + e - \frac{e}{2} + \frac{e}{6})(z-1)^3 + \mathcal{O}(|z-1|^4) \\
=& e + \frac{e}{2}(z-1)^2 - \frac{e}{3}(z-1)^3 + \mathcal{O}(|z-1|^4).
\end{aligned}$$

(iii) Die Funktion $\frac{e^z}{z(z-1)^3}$ ist auf $B(\frac{3}{2},1)$ nur an der Stelle $z=1$ nicht definiert. Wir berechnen die Laurententwicklung der Funktion an dieser Stelle unter Verwendung des letzten Aufgabenteils:

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{z(z-1)^3} &= \frac{1}{(z-1)^3}\left(e+\frac{e}{2}(z-1)^2-\frac{e}{3}(z-1)^3+\mathcal{O}(|z-1|^4)\right)\\ &= e(z-1)^{-3}+\frac{e}{2}(z-1)^{-1}-\frac{e}{3}+\mathcal{O}(|z-1|).\end{aligned}$$

Also sehen wir mit Verwendung des Residuensatzes:

$$\int_{|z-\frac{3}{2}|=1}\frac{e^z}{z(z-1)^3}\,dz = 2\pi i\frac{e}{2} = \pi e i$$

Aufgabe 3. Berechne die Laurentreihenentwicklung von

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

in den Kreisringen $K_1=B(0,0,1)=\{|z|<1\}$, $K_2=B(0,1,2)=\{1<|z|<2\}$ und $K_3=B(0,2,\infty)=\{2<|z|\}$.

Lösung. Im Folgenden werden wir sehen, dass wir die gesuchten Laurentreihen auf zwei Arten finden können: entweder wir verwenden auf geschickte Weise geometrische Reihen oder wir benutzen direkt die Formel aus der Vorlesung. Die erste Methode führt teilweise schneller zu Ergebnissen, kann aber nicht in jeder Situation angewendet werden.
Zur Erinnerung: eine analytische Funktion $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ mit $K=B(0,R_1,R_2)\subset U$ wird auf K dargestellt durch ihre Laurentreihe

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_kz^k,$$

mit

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz \tag{1}$$

für alle $R\in(R_1,R_2)$.
Auf dem Kreisring K_1 können wir schreiben

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{1-z}\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0}z^k\right)\left(\sum_{l\geq 0}(\frac{z}{2})^l\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{r\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{r}1\cdot 2^{-l}\right)z^r\\ &= \frac{1}{2}\sum_{r\geq 0}\frac{1-2^{-r-1}}{1-2^{-1}}z^r\\ &= \sum_{r\geq 0}\left(1-2^{-r-1}\right)z^r.\end{aligned}$$

Hier haben wir für die geometrischen Reihen verwendet, dass $|z| < 1$ und $|\frac{z}{2}| < 1$. Wollen wir stattdessen die Formel (1) anwenden, ergibt sich $b_k = 0$ für $k < 0$ nach dem Satz von Cauchy und nach der Cauchy-Formel

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi i}{k!}\left(\frac{d}{dz}\right)^k f(z)\Big|_{z=0}.$$

Um die höheren Ableitungen von f an der Stelle 0 zu berechnen, können wir z.B. eine Partialbruchzerlegung von f verwenden:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Setzen wir dann die Formel

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k (z-a)^{-1} = (-1)^k (k)!(z-a)^{-k-1}$$

ein, erhalten wir nach kurzer Rechnung die Koeffizienten $b_r = 1 - 2^{-r-1}$ von oben. Beachte an dieser Stelle, dass wir unter Verwendung des Residuensatzes sehen:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \mathrm{Res}_0\left(\frac{f(z)}{z^{r+1}}\right).$$

Für den Kreisring K_2 klammern wir im Nenner einen Faktor z aus:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{2(z-1)(1-\frac{z}{2})} = \frac{-1}{2z}\frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{-1}{2z}\left(\sum_{k\geq 0} z^{-k}\right)\left(\sum_{l\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^l\right) \end{aligned}$$

Da beide Reihen für $z \in K_2$ absolut konvergent sind, können wir im Produkt die Terme nach Potenzen von z^r umordnen und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{2z}\left(\sum_{r\geq 0}\left(\sum_{l=r}^{\infty} 2^{-l}\right) z^r\right) + \frac{-1}{2z}\left(\sum_{r<0}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}\right) z^r\right) \\ &= \frac{-1}{2z}\left(\sum_{r\geq 0}\left(2 - \frac{1-2^{-r}}{1-2^{-1}}\right) z^r\right) + \frac{-1}{2z}\left(\sum_{r<0} 2z^r\right) \\ &= \sum_{r\geq 0} -2^{-r} z^{r-1} + \sum_{r<0} -z^{r-1}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass auf K_2 gerade gilt

$$b'_r = \begin{cases} -1 & \text{, für } r \leq -2 \\ -2^{-r-1} & \text{, für } r \geq -1. \end{cases}$$

Um die Zahlen b'_r über Kurvenintegrale zu bestimmen, verwenden wir den Residuensatz. Für $R \in (1,2)$ ist die Funktion $f(z)/z^{r+1}$ auf $B(0,R)$ höchstens an den Stellen 0 und 1 nicht definiert. Es gilt hier also

$$\begin{aligned}
b'_r &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \frac{f(z)}{z^{r+1}}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i \mathrm{Res}_0(\frac{f(z)}{z^{r+1}}) + 2\pi i \mathrm{Res}_1(\frac{f(z)}{z^{r+1}})\right) \\
&= \underbrace{\mathrm{Res}_0(\frac{f(z)}{z^{r+1}})}_{=b_r} + \mathrm{Res}_1(\frac{f(z)}{z^{r+1}}).
\end{aligned}$$

Das Residuum auf der rechten Seite berechnet sich aber sehr einfach:

$$\mathrm{Res}_1(\frac{f(z)}{z^{r+1}}) = \mathrm{Res}_1(\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-2)z^{r+1}}) = \frac{1}{(z-2)z^{r+1}}\Big|_{z=1} = -1$$

Wir sehen also, dass $b'_r = b_r - 1$ und ein kurzer Vergleich der expliziten Formeln oben bestätigt das. Deshalb ist die Berechnung der Laurentkoeffizienten auf K_2 über die Residuenmethode sehr einfach sobald wir die Koeffizienten auf K_1 kennen.
Mit dem gleichen Argument wie oben sehen wir für die Laurentkoeffizienten b''_r auf K_3 dass

$$\begin{aligned}
b''_r &= \mathrm{Res}_0(\frac{f(z)}{z^{r+1}}) + \mathrm{Res}_1(\frac{f(z)}{z^{r+1}}) + \mathrm{Res}_2(\frac{f(z)}{z^{r+1}}) \\
&= b'_r + \frac{1}{(z-1)z^{r+1}}\Big|_{z=2} = b'_r + 2^{-r-1} \\
&= \begin{cases} -1 + 2^{-r-1} & , \text{ für } r \leq -2 \\ 0 & , \text{ für } r \geq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Durch Ausklammern eines Faktors z^2 im Nenner kann man dieses Ergebnis auch über geometrische Reihen erhalten.

Aufgabe 4. Im Folgenden wollen wir den Wert der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit Hilfe von komplexen Kurvenintegralen der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)}$ bestimmen. Das wurde auch schon ausführlich in der Vorlesung diskutiert, aber hier noch mal zu selber durcharbeiten, wenn gewünscht.

(i) Zeige, dass f eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ definiert.

(ii) Sei $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die an der Stelle $z_0 \in U$ eine Nullstelle vom Grad d hat. Zeige, dass die Funktion $\tilde{h}(z) = g(z)/(z-z_0)^d$ definiert auf $U \setminus \{z_0\}$ eine stetige Fortsetzung h auf U hat mit $h(z_0) \neq 0$. Betrachte hierzu die Potenzreihenentwicklung von g um z_0. Zeige, dass h wieder analytisch ist. Was ist die Potenzreihe von h um z_0?

(iii) Sei $0 < \epsilon < 1/2$. Verwende den letzten Aufgabenteil um zu zeigen

$$\int_{\partial B(n,\epsilon)} f(z)dz = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} i, \text{ für } n = 0 \\ (-1)^n \frac{2i}{n^2}, \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

(iv) Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ betrachte das achsenparallele Rechteck R_n mit Eckpunkten $\pm(n + 1/2) \pm i(n + 1/2)$ in $\mathbb{C}$. Zeige, dass die Folge

$$\left(\int_{\partial R_n} f(z)dz\right)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$$

für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

(v) Kombiniere die vorigen Aufgabenteile und beweise, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(vi) Schlussfolgere, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lösung. (i) Es genügt zu zeigen, dass $\sin(\pi z)$ genau auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ verschwindet. Es gilt aber

$$\sin(\pi z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) = \frac{1}{2i}e^{-i\pi z}\left(e^{2i\pi z} - 1\right).$$

Da der Faktor $e^{-i\pi z}$ nie verschwindet ist $\sin(\pi z) = 0$ genau falls $e^{2i\pi z} = 1$. Aus der Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen wissen wir aber $e^w = 1$ genau für $w \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Also ist $\sin(\pi z) = 0$ genau für $z \in \mathbb{Z}$.

(ii) Betrachte die Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

von g um die Stelle z_0. Per Definition hat die Nullstelle z_0 von g Grad d falls $a_0 = a_1 = \ldots = a_{d-1} = 0$ und $a_d \neq 0$. Die Funktion g hat also die Form

$$g(z) = a_d(z - z_0)^d + a_{d+1}(z - z_0)^{d+1} + +a_{d+2}(z - z_0)^{d+2} + \ldots$$

Zumindest formal können wir hier also einen gemeinsamen Faktor $(z - z_0)^d$ ausklammern und erhalten eine potentielle Potenzreihe für h:

$$g(z) = (z - z_0)^d \left(a_d + a_{d+1}(z - z_0)^1 + +a_{d+2}(z - z_0)^2 + \ldots\right)$$

Wir wollen also zeigen, dass die Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k, \text{ mit } b_k = a_{k+d}$$

einen positiven Konvergenzradius hat. Da g analytisch ist, hat die ursprüngliche Potenzreihe positiven Konvergenzradius. Aus der Definition folgt, dass dies äquivalent dazu ist, dass $\sqrt[k]{|a_k|} < S$ für ein festes $S > 0$ und alle genügend grossen $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Also haben wir $|a_k| < S^k$, und wählen wir $S \geq 1$ dann sieht man leicht, dass gilt

$$|b_k| = |a_{k+d}| < S^{k+d} \leq (S^d)^k.$$

Dies zeigt, dass h positiven Konvergenzradius hat, also analytisch ist, und auf $U \setminus \{z_0\}$ mit $\tilde{h}$ übereinstimmt. Also ist h die gesuchte analytische Fortsetzung und $h(z_0) = a_d \neq 0$.

(iii) Im Folgenden sei $g(z) = z^2 \sin(\pi z)$. Sei zunächst $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann hat g an der Stelle $z_0 = n$ eine Nullstelle. Da $\sin'(\pi n) = \pi \cos(\pi n) = (-1)^n \pi \neq 0$ ist, ist die Nullstelle vom Grad 1. Laut dem letzten Aufgabenteil lässt sich die Funktion $h(z) = z^2 \sin(\pi z)/(z - n)$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen mit $h(n) = (z^2 \sin(\pi z))'(n) = n^2(-1)^n \pi$. Also gilt

$$\int_{\partial B(n,\epsilon)} \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} dz = \int_{\partial B(n,\epsilon)} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{h(z)} dz = 2\pi i \frac{1}{h(z)}\Big|_{z=n} = (-1)^n \frac{2i}{n^2}$$

nach der Cauchyformel.

Betrachte nun $n = z_0 = 0$, dann hat g Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \pi z^3 - \frac{1}{3!}\pi^3 z^5 + \frac{1}{5!}\pi^5 z^7 + \mathcal{O}(|z|^9)$$

Also hat die Nullstelle von g bei $z_0 = 0$ Multiplizität 3 und es gilt

$$h(z) = \frac{g(z)}{z^3} = \pi - \frac{1}{3!}\pi^3 z^2 + \frac{1}{5!}\pi^5 z^4 + \mathcal{O}(|z|^6).$$

Aus dieser Darstellung können wir mit dem Ansatz $h(z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ aus der Gleichung

$$1 = h(z) \cdot h(z)^{-1} = \left(\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 z^2 + \frac{1}{5!}\pi^5 z^4 + \mathcal{O}(|z|^6)\right) \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots\right)$$

durch Vergleich der Koeffizienten bestimmen, dass

$$h(z)^{-1} = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{6} z^2 + \frac{7\pi^3}{360} z^4 + \mathcal{O}(|z|^6).$$

Es gilt also

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} dz = \int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{1}{z^3} h(z)^{-1} dz = \frac{2\pi i}{2} \left(\frac{d}{dz}\right)^2 h(z)^{-1}\Big|_{z=n} = \pi i 2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{3} i,$$

wieder nach der Cauchyformel.

(iv) Wir wollen die Standardabschätzung für Kurvenintegrale verwenden, müssen also auf dem genannten Rechteck den Betrag von $f(z)$ nach oben abschätzen. Da $f(z) = 1/(z^2 \sin(\pi z))$ müssen wir also den Betrag von $\sin(\pi z)$ nach unten abschätzen. Sei $z = x + iy \in \partial R_n$, dann unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $y = \pm(n+1/2)$, $x \in [-n-1/2, n+1/2]$
Hier haben wir unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
|\sin(\pi z)| &= \left|\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\left||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|e^{\mp\pi(n+1/2)} - e^{\pm\pi(n+1/2)}\right|
\end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ ist $e^{-\pi(n+1/2)} < 1$ und $e^{\pi(n+1/2)} > 2$, also ist der Ausdruck oben grösser als 1.
Fall 2: $x = \pm(n+1/2)$, $y \in [-n-1/2, n+1/2]$
Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $x = n + 1/2$, der andere ist analog. Jetzt verwenden wir explizit die Form der x-Koordinate:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi(n+1/2)}e^{-\pi i} - e^{-i\pi(n+1/2)}e^{\pi y}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left((-1)^n i e^{-\pi i} - (-1)^n(-i)e^{\pi y}\right) \\
&= \frac{1}{2}(-1)^n\left(e^{-\pi i} + e^{\pi y}\right) = (-1)^n \cosh(\pi y).
\end{aligned}$$

Also gilt $|\sin(\pi z)| \geq 1$ auch auf diesen Teilstücken.
Kombinieren wir die beiden vorigen Abschätzungen erhalten wir also

$$\left|\int_{\partial R_n} f(z)dz\right| \leq l(\partial R_n) \cdot \max_{z\in\partial R_n}\left|\frac{1}{z^2\sin(\pi z)}\right| \leq (8n+4)\frac{1}{(n+1/2)^2 \cdot 1}$$

Dieser Ausdruck konvergiert für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0.

(v) Da unsere Funktion f nur auf $\mathbb{Z}$ nicht definiert ist, sehen wir durch die übliche Art von Homotopie von Kurven, dass

$$\int_{\partial R_n} f(z)dz = \sum_{k=-n}^{n}\int_{\partial B(k,\epsilon)} f(z)dz.$$

Im Limes $n \longrightarrow \infty$ geht die linke Seite gegen 0 und die rechte Seite wird zu einer Summe von $k = -\infty$ bis $k = \infty$. Wir erhalten also

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\partial B(k,\epsilon)} f(z)dz = \frac{\pi^2}{3}i + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^k\frac{2i}{k^2}.$$

Division durch $2i$ ergibt die gewünschte Formel.

(vi) Für $S = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{k^2}$ gilt gerade

$$S + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^k\frac{1}{k^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{2}{(2j)^2} = \frac{S}{2}.$$

Umstellen dieser Formel ergibt schliesslich

$$S = -2 \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{3}.$$

Wir erhalten also die gewünschte Formel, denn es gilt

$$S = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Aufgabe 5. Seien B_k die durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}$$

definierten Bernoullizahlen. Zeige, dass dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

Kannst du auch den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ bestimmen?

Hinweis: Modifiziere die vorherige Aufgabe. Wenn du Schwierigkeiten hast, lohnt es sich vielleicht die Aufgabe später noch mal anzuschauen, wenn alle Konzepte besser sitzen.

Lösung. Benutze die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^{2k}\sin(\pi z)}$. Die Schwierigkeit liegt in der Bestimmung von

$$\frac{1}{\sin(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2B_{2k} \frac{(-1)^k(1 - 2^{2k-1})z^{2k-1}}{(2k)!}.$$

Denn:

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{2ie^{iz}}{e^{2iz} - 1} = 2i(\frac{e^{iz} - 1}{e^{2iz} - 1} + \frac{1}{e^{2iz} - 1}) = 2i(\frac{1}{e^{iz} + 1} + \frac{1}{e^{2iz} - 1}).$$