Übungsblatt 10

Abgabe am 5. Dezember 17

Aufgabe 1. (i) Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, ganze Funktion. Zeige, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganze Funktionen mit $f \circ g = 0$. Zeige, dass entweder g konstant ist oder $f = 0$.

Aufgabe 2. Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)}\, dt.$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $\emptyset \neq W \subset U$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $f|W = 0$. Zeige, dass dann $f = 0$ auf ganz U.

Hinweis: Betrachte die Mengen

$$A = \{z \in U\colon f(z) \neq 0 \text{ oder } z \text{ ist eine isolierte Nullstelle von } f\}$$
$$B = \{z \in U\colon \text{es existiert eine Umgebung } z \in V \subset U \text{ offen mit } f|V = 0\}.$$

Zeige, dass A und B offen sind und eine disjunkte Überdeckung von U bilden.

Aufgabe 4.

(i) Zeige das Minimumsprinzip: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Hat f ein lokales Betragsminimum in a, so ist notwendigerweise $f(a) = 0$.

(ii) Folgere hieraus den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 5. (Lemma von Schwarz) Seien D die offene Einheitskreisscheibe und $f : D \longrightarrow D$ eine nichtkonstante analytische Abbildung, so dass $f(0) = 0$.

(a) Beweise, dass
  (i) $\forall z \in D \;\; |f(z)| \leq |z|$.
  (ii) $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (i) Es existiert $z_0 \in D \setminus \{0\}$, sodass $|f(z_0)| = |z_0|$.
  (ii) $|f'(0)| = 1$.
  (iii) Es existiert $\vartheta \in \mathbb{R}$, sodass $f(z) = ze^{i\vartheta}$ für alle $z \in D$ gilt.

Hinweis: Betrachte die Abbildung $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ und verwende das Maximumprinzip.

$\star$ **Aufgabe 6.** Sei $f\colon B_1(0) \longrightarrow B_1(0)$ eine analytische Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe mit zwei Fixpunkten (Es gibt also $a, b \in B_1(0)$ mit $a \neq b$ und $f(a) = a$, $f(b) = b$). Zeige, dass $f(z) = z$ für alle $z \in B_1(0)$.

Hinweis: Lemma von Schwarz.

⋆ **Aufgabe 7.** Zeige, dass alle Automorphismen der (offenen) Einheitskreisscheibe D (das heisst alle analytischen Bijektionen $\phi \colon D \longrightarrow D$ mit analytischer Umkehrfunktion) von der Form

$$\phi(z) = \lambda \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

für $a \in D$ und $\lambda \in \partial D$ sind. (Hinweis: vorherige Aufgabe)

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.