Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt, C. Schießl

FUNKTIONENTHEORIE

1. Dezember 17
HS 2017

Übungsblatt 11

Abgabe am 12. Dezember 17

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Integrale:

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 2}$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4 + 6x^2 + 25}\,\mathrm{d}x$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2}\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in U$. Seien $f, g\colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Zeige folgende Formeln zur Berechnung von Residuen:

(i) Ist $\operatorname{ord}(f, a) \geq -1$, so gilt Res(f,a) $= \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

(ii) Ist a ein Pol der Ordnung k von f, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{h^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

mit $h(z) = (z-a)^k f(z)$.

(iii) Ist f holomorph an a und hat g eine einfache Nullstelle in a so gilt

$$\operatorname{Res}(f/g, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iv) Hat f in a einen Pol erster Ordnung und ist g analytisch in einer Umgebung von a, so gilt

$$\operatorname{Res}(fg, a) = g(a)\operatorname{Res}(f, a).$$

(v)

$$\operatorname{Res}(f', a) = 0$$

Aufgabe 3.

(i) Sei $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit einem Pol der Ordnung $k \geq 1$ bei a. Dann gibt es für jedes $R > 0$ ein $r > 0$ mit

$$f(B(a, r) \setminus \{a\}) \subset B(0, R, \infty),$$

das heisst $|f(z)| > R$ für $|z - a| < r$.

(ii) Umgekehrt gibt es für jedes $r > 0$ mit $B(a,r) \subset U$ ein $R > 0$, so dass

$$B(0,R,\infty) \subset f(B(a,r) \setminus \{a\}),$$

das heisst alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > R$ sind Bilder von komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < r$.

(iii) Bestimme die Art der Singularität von $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$ in $z_0 = i$.

Aufgabe 4. Sei a eine ausserwesentliche Singularität der analytischen Funktionen $f, g\colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ (das heisst a ist eine isolierte Singularität, die nicht wesentlich ist). Zeige, dass dann a auch eine ausserwesentliche Singularität der Funktionen $f \pm g$, fg und $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) ist. Zeige die Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f \pm g; a) &\geq \min\{\operatorname{ord}(f;a), \operatorname{ord}(g;a)\} \\ \operatorname{ord}(fg; a) &= \operatorname{ord}(f;a) + \operatorname{ord}(g;a) \\ \operatorname{ord}(\frac{f}{g}; a) &= \operatorname{ord}(f;a) - \operatorname{ord}(g;a) \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Zeige folgende komplexe Version der Regeln von L'Hospital: Seien $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytische Funktionen, welche im Punkt $a \in U$ dieselbe Ordnung k haben. Dann gilt

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}.$$

Aufgabe 6. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze, injektive Funktion. Zeige, dass sie von der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ ist. Betrachte hierzu die Singularität der Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$ bei $z = 0$.

⋆ **Aufgabe 7.**

(i) Sei p ein Polynom von Grad n und $f\colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Welche Art von isolierter Singularität hat $p \circ f$ in a?

(ii) Sei nun g eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Welche Singularität hat dann $g \circ f$?

⋆ **Aufgabe 8.** Bestimme alle Paare ganzer Funktionen f, g mit $f^2 + g^2 = 1$.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.