Übungsblatt 12

Abgabe am 19. Dezember 17

Die folgenden Aufgabe entwickelt Techniken, um mit Möbiustransformationen (auch "gebrochen-lineare Funktionen", "linear fractional transformations" genannt) zu arbeiten. Als Hilfestellung könntest du auch zuerst das entsprechende Kapitel in einem Lehrbuch, zum Beispiel Gamelin, II.7, Ahlfors III.3 oder Salomon 1.1.4 durcharbeiten, um die konkreten Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1. Jeder Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ ordnen wir die meromorphe Funktion

$$\phi_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

zu. Diese Funktion können wir als Endomorphismus $\mathbb{C} \coprod \infty \longrightarrow \mathbb{C} \coprod \infty$ auffassen. Wir nennen solche Abbildungen *Möbius-Transformationen*.

(i) Seien M, $N \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$. Zeige $\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN}$. Folgere daraus eine konkrete Formel für ϕ_M^{-1}.

(ii) Zeige, dass es für paarweise verschiedene z_1, z_2, z_3 aus $\mathbb{C} \coprod \infty$ genau eine Möbiustransformation ϕ_{z_1,z_2,z_3} mit $\phi(z_1) = 0$, $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = \infty$ gibt. Gib eine konkrete Formel für ϕ_{z_1,z_2,z_3} an.

(iii) Für paarweise verschiedene z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$ definieren wir das Doppelverhältnis

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \phi_{z_2,z_3,z_4}(z_1).$$

Zeige, dass

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4}\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$$

(iv) Sei T eine Möbiustransformation. Zeige

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

(v) Seien w_1, w_2, w_3, $w_4 \in \mathbb{C}$ ebenfalls alle verschieden. Zeige, dass es genau dann eine Möbiustransformation T mit $T(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gibt, wenn

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

(vi) Zeige, dass $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn alle z_i auf einer Gerade oder einem Kreis liegen.
Hinweis: Fasskreisbogen

(vii) Folgere, dass eine Möbiustransformation eine Gerade oder einen Kreis wieder auf eine Gerade oder einen Kreis abbildet.

Aufgabe 2. Finde eine Möbiustransformation T mit $T(-1) = -1$, $T(0) = i$, $T(1) = 1$.

Aufgabe 3. Gibt es eine Möbiustransformation T mit $T(0) = -1$, $T(i) = 0$, $T(2i) = \frac{1}{3}$ und $T(1) = 1$?

Aufgabe 4. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

Bestimme die Bilder der Punktmengen

$$A = \{\operatorname{Re} z = 0\} \qquad B = \{\operatorname{Im}(z) = 0\} \qquad C = \{\operatorname{Re} z > 0\} \qquad D = \{|z| < 1\}$$

unter der Abbildung T.

Aufgabe 5. Bestimme $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. (Hinweis: Aufgabe 5, letzte Serie)

Aufgabe 6. Berechne

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Aufgabe 7. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k < n$. Zeige, dass

$$\int_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Aufgabe 8. Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene.

(i) Zeige, dass jeder Automorphismus von $\mathbb{C}$ eine Möbiustransformation ist. (Hinweis: Es gibt eine bihomolomorpher Abbildung zwischen $\mathbb{H}$ und einer Einheitskreisscheibe).

(ii) Zeige, dass jeder solcher Automorphismus sogar als Möbiustransformation mit reellen Koeffizienten geschrieben werden kann.

(iii) Zeige, dass

$$\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \colon a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\} / \pm I = \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

⋆ **Aufgabe 9.** Zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.