

## Übungsblatt 2

Abgabe am 10. Oktober 16

**Aufgabe 1.** Welche dieser Funktionen können Realteil einer analytischen Funktion sein? Gib diese gegebenenfalls an:

- (i)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$
- (ii)  $u(x, y) = e^x \sin(y)$
- (iii)  $u(x, y) = e^x \sinh(y)$

**Aufgabe 2.**

- (i) Leiten Sie die Polarform der Cauchy-Riemann Gleichungen her:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

- (ii) Überprüfen Sie, dass für jede ganze Zahl  $m$  die Funktionen

$$u(re^{i\theta}) := r^m \cos(m\theta), \quad v(re^{i\theta}) := r^m \sin(m\theta)$$

die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen.

**Aufgabe 3.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine *stückweise differenzierbare Kurve* in  $U$  von  $p \in U$  nach  $q \in U$  in  $U$  ist eine stetige Abbildung  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\phi(0) = p$ ,  $\phi(1) = q$ , so dass es  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  gibt derart, dass  $\phi|_{(t_{i-1}, t_i)}$  differenzierbar ist für alle  $i = 1, \dots, n$ .

- (i) Ist  $\phi$  eine stückweise differenzierbare Kurve von  $p \in U$  nach  $q \in U$  und  $\psi$  eine solche Kurve von  $q$  nach  $r \in U$ , dann ist

$$\psi * \phi : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto \begin{cases} \phi(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi(2t - 1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stückweise differenzierbare Kurve in  $U$  von  $p$  nach  $r$ .

- (ii) Die Relation  $\sim$  auf  $U$  definiert für  $p, q \in U$  durch

$$p \sim q \iff \text{Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve von } p \text{ nach } q$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind offene Teilmengen von  $U$ .

- (iii) Folgere: Ist  $U$  zusammenhängend, dann können je zwei Punkte in  $U$  durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbunden werden.

**Erinnerung:**  $U \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend, falls für alle  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  offen und disjunkt mit  $U \subset A \cup B$  folgt  $A \cap U = \emptyset$  oder  $B \cap U = \emptyset$ .

- (iv) Schliesse, dass für eine offene, zusammenhängende Menge  $U \subset \mathbb{C}$  jede analytische Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f' = 0$  konstant ist.

**Aufgabe 4.** Reelle Funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stellen wir uns üblicherweise als Graphen  $\{(x, g(x))\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vor. Bei einer komplexen Funktion wäre dieser Graph aber eine Teilmenge des vierdimensionalen Raums  $\mathbb{C}^2$ . Deshalb müssen wir uns anders behelfen. Verschiedene Methoden eine komplexe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w = f(z)$  darzustellen wären:

- (i) Man stellt sich die Funktion  $f$  als Verformung der Zahlenebene  $f$  vor. Um diese zu zeichnen, betrachtet man die Bilder der Gitternetze  $\operatorname{Re} z = \text{konstant}$ ,  $\operatorname{Im} z = \text{konstant}$  oder des Polarkoordinatennetzes  $r = \text{konstant}$ ,  $\phi = \text{konstant}$ .
- (ii) Man zeichnet ein "Höhenlinienbild" von  $f$ , das heißt, man zeichnet die Urbilder der Gitternetze  $\operatorname{Re} w = \text{konstant}$ ,  $\operatorname{Im} w = \text{konstant}$ .
- (iii) Man zeichnet den (dreidimensionalen) Graphen der Funktion  $|f|$ .

Führe diese Methoden für  $f(z) = z^3$  durch. Aus der Vorlesung wissen wir, dass  $f$  analytisch, also eine konforme Abbildung ist. Wo an deinen Zeichnungen kann man das auch erkennen?

**Aufgabe 5.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ . Zeige: Ist  $f$  konform auf  $U$ , dann ist  $f$  analytisch auf  $U$  mit  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ .

---

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.