Übungsblatt 4

Abgabe am 24. Oktober 16

Aufgabe 1. Gibt es eine komplexe Wurzelfunktion? Genauer: Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \neq 0$? Hinweis: Zeige zuerst, dass eine solche Funktion so gewählt werden kann, dass sie $f(zw) = f(z)f(w)$ für alle $z, w \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ und $S = \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$. Zeige, dass $\exp\colon S \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ eine bijektive Abbildung ist. Stelle die Umkehrfunktion explizit dar. Ist sie analytisch? (Eine solche Umkehrfunktion ist ein sogenannter *Zweig des Logarithmus*).

Aufgabe 3. Sei

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}.$$

Zeige:

(i) Die Funktion f ist analytisch auf $B_1(0) = \{z\colon |z| < 1\}$ mit Ableitung $f'(z) = \frac{1}{1+z}$.

(ii) $e^{f(z)} = 1 + z$ für alle $z \in B_1(0)$.

Aufgabe 4. Gibt es eine komplexe Logarithmusfunktion, das heisst eine stetige Funktion $l\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Hinweis: Aufgabe 1.

Aufgabe 5. Zeige, dass $u\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ zwar harmonisch ist, aber keine harmonisch konjugierte Funktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat.

⋆ **Aufgabe 6.** Die Formeln

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

sind sehr bekannt. Zeige allgemein, dass für $r \geq 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} n^r = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} B_k (N+1)^{r+1-k},$$

wobei B_k die durch

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

gegebenen Bernoullizahlen sind. Hinweis: Betrachte $\sum_{i=0}^{N} \exp(iz)$.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.