Übungsblatt 5

Abgabe am 31. Oktober 17

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$. Sei γ der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $a + bi$, $a - bi$, $-a + bi$, $-a - bi$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinne (gegen den Uhrzeigersinn). Berechne

(i)
$$\int_\gamma \overline{z}\, dz$$

(ii)
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

Aufgabe 2. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $\partial B_R(a)$ der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $R > 0$ (im Gegenuhrzeigersinn orientiert). Zeige:

$$\int_{\partial B_R(a)} P(\overline{z})\, dz = 2\pi i R^2 P'(\bar{a})$$

Aufgabe 3. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiere die Länge von γ als

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Hier bezeichnet $\| \ \|$ die übliche euklidische Norm. Unter der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ergibt dies gerade die Definition von Kurvenlänge aus der Vorlesung.

(i) Zeige, dass die Bogenlänge einer Kurve von der Parametrisierung unabhängig ist, das heisst für eine Umparametrisierung $\phi : [\hat{a}, \hat{b}] \to [a, b]$ gilt $l(\gamma) = l(\gamma \circ \phi)$.

(ii) Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte und ist $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve von p nach q, so gilt $\|p - q\| \leq l(\gamma)$.
Hinweis: Falls $p \neq q$ betrachte das Integral

$$\int_a^b \gamma'(t) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} dt.$$

Hier ist $\cdot$ das Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$.

$\star$ **Aufgabe 4.** Sei D ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂D. Zeige, dass

$$\int_{\partial D} \overline{z}\, dz = 2iF(D),$$

wobei $F(D)$ der Flächeninhalt von D ist.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.