Übungsblatt 7

Abgabe am 14. November 17

Aufgabe 1. Berechne

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$$

für
(a) $C = \{z : |z-2| = 1\}$
(b) $C = \{z : |z-2| = 3\}$
(c) $C = \{z : |z-2| = 5\}$
Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2. (a) Für $R > 0$ definiere man $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{I}m\, z > 0, |z| < R\}$. Zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

(b) Zeige, dass für $R > 1$ das Integral

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

von R unabhängig ist.

(c) Verwende den Integralsatz und die Integralformel von Cauchy sowie Partialbruchzerlegung, um für grosse R

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

zu berechnen.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und der Kreisring $\{a \in \mathbb{C} \colon r \leq |z-a| \leq R\}$ in U. Sei $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Zeige, dass $\int_{\partial B(a,r)} f(z)\,dz = \int_{\partial B(a,R)} f(z)\,dz$.

⋆ **Aufgabe 4.** Sei f analytisch auf $B(z_o, r)$ für $r > 0$, mit $f(z_0) = 0$ aber $f'(z_0) \neq 0$. Man zeige für genügend kleine ϵ, dass

$$\int_{\partial B(z_0,\epsilon)} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

gilt.
Hinweis: Betrachte noch einmal den Beweis der Cauchy-Integralformel.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.