Übungsblatt 8

Abgabe am 21. November 17

Aufgabe 1. (Integralformel von Cauchy) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Sei $z_0 \in U$ und $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\{z\colon |z - z_0| \leq r\} \subset U$. Zeige, dass dann

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

für jedes a im Inneren des Kreises $|z - z_0| < r$. Hinweis: Wurde in der Vorlesung beim Satz von der Potenzreihenentwicklung schon fast bewiesen

Aufgabe 2. Berechne für $a, b \in \mathbb{C}$ und $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Integral

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$$

in Abhängigkeit von r. **Beachte:** Für welche r ist das Integral definiert?

Aufgabe 3. Zeige

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\, dt = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

durch Auswertung des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz.$$

Aufgabe 4.

(i) Gibt es beschränkte, nicht-konstante, analytische Funktionen $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$?

(ii) Gibt es ganze, nicht-konstante Funktionen $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit beschränktem Realteil?

Aufgabe 5. Berechne

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz.$$

Aufgabe 6. Arbeite die in der Vorlesung gemachten Abschätzungen für Polynome aus: Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad n. Dann existieren $C_1, C_2, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$C_1 |z|^n < |p(z)| < C_2 |z|^n$$

für $|z| > \delta$.

Aufgabe 7. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und $p(z)$ ein Polynom von Grad n, sodass $|f(z)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Hinweis: Cauchy-Abschätzungen.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.