Übungsblatt 9

Abgabe am 28. November 17

Aufgabe 1.

(i) Sei $p(z) = z^n + e_1 z^{n-1} + \cdots + e_{n-1} z + e_n$ ein normiertes Polynom von Grad n mit Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ (eine d-fache Nullstelle kommt in dieser Liste also d Mal vor). Zeige:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \\ e_2 &= \sum_{i<j} \zeta_i \zeta_j \\ e_3 &= -\sum_{i<j<k} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \\ &\cdots \\ e_n &= (-1)^n \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n \end{aligned}$$

(ii) Sei $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine n-te Einheitswurzel. Berechne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \epsilon^k$$

Aufgabe 2. (i) Berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktionen e^z und $1/z$ um $z = 1$ bis zur Ordnung 3.

(ii) Leite daraus die Potenzreihenentwicklung von e^z/z um $z = 1$ bis zur Ordnung 3 her.

(iii) Berechne

$$\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz.$$

Aufgabe 3. Berechne die Laurentreihenentwicklung von

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

in den Kreisringen $K_1 = B(0,0,1) = \{|z| < 1\}$, $K_2 = B(0,1,2) = \{1 < |z| < 2\}$ und $K_3 = B(0,2,\infty) = \{2 < |z|\}$.

Aufgabe 4. Im Folgenden wollen wir den Wert der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit Hilfe von komplexen Kurvenintegralen der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)}$ bestimmen. Das wurde auch schon ausführlich in der Vorlesung diskutiert, aber hier noch mal zu selber durcharbeiten, wenn gewünscht.

(i) Zeige, dass f eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ definiert.

(ii) Sei $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die an der Stelle $z_0 \in U$ eine Nullstelle vom Grad d hat. Zeige, dass die Funktion $\tilde{h}(z) = g(z)/(z-z_0)^d$ definiert auf $U \setminus \{z_0\}$ eine stetige Fortsetzung h auf U hat mit $h(z_0) \neq 0$. Betrachte hierzu die Potenzreihenentwicklung von g um z_0. Zeige, dass h wieder analytisch ist. Was ist die Potenzreihe von h um z_0?

(iii) Sei $0 < \epsilon < 1/2$. Verwende den letzten Aufgabenteil um zu zeigen

$$\int_{\partial B(n,\epsilon)} f(z)dz = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3}i, & \text{für } n = 0 \\ (-1)^n \frac{2i}{n^2}, & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

(iv) Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ betrachte das achsenparallele Rechteck R_n mit Eckpunkten $\pm(n + 1/2) \pm i(n+1/2)$ in $\mathbb{C}$. Zeige, dass die Folge

$$\left(\int_{\partial R_n} f(z)dz \right)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$$

für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

(v) Kombiniere die vorigen Aufgabenteile und beweise, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(vi) Schlussfolgere, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 5. Seien B_k die durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}$$

definierten Bernoullizahlen. Zeige, dass dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

Kannst du auch den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ bestimmen?

Hinweis: Modifiziere die vorherige Aufgabe. Wenn du Schwierigkeiten hast, lohnt es sich vielleicht die Aufgabe später noch mal anzuschauen, wenn alle Konzepte besser sitzen.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.