MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 10

1. Aufgabe

Es seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Das Faltungsprodukt $f * g$ von f und g ist definiert durch

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Faltungsprodukt ein kommutatives, assoziatives Produkt definiert, also

$$f * g = g * f \text{ und}$$
$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

(b) Zeigen Sie

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$$

2. Aufgabe

Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Beweisen Sie den Faltungssatz

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

3. Aufgabe

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

mittels Residuensatz.

4. Aufgabe

Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$g(x) = \frac{1}{3+\sin(2x)}$$

unter Verwendung des Residuensatzes.

5. Aufgabe

Die *Tschebyscheff Polynome* T_l sind rekursiv definiert durch $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und $T_{l+1}(x) = 2xT_l(x) - T_{l-1}(x)$ für $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeigen Sie:

(a) Für $l \geq 1$ ist T_l ein Polynom des l-ten Grades mit Leitkoeffizient 2^{l-1}.
(b) $T_l(\cos\theta) = \cos(l\theta)$
(c) Die Tschebyscheff Polynome T_l sind orthogonal bezüglich $u(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, nämlich

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } n = m \text{ und } n \geq 1 \\ \pi, & \text{falls } n = m = 0. \end{cases}$$