MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 11

1. Aufgabe

Das $\square$-Produkt für L^1-Funktionen f, g ist definiert durch

$$f \square g(x) = f(x) \int_{-\infty}^{x} g(y)dy + g(x) \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

Zeigen Sie:

(a) Das $\square$-Produkt ist kommutativ und assoziativ.

(b)

$$||f \square g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$$

2. Aufgabe

Das n-te Laguerre-Polynom $L_n(x), n \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Zeigen Sie:

(a)

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

(b) L_n erfüllt die Laguerre-Gleichung

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

(c)

$$\int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} = 0, \text{ wenn } n \neq m.$$

Hinweis: Bringen Sie die Laguerre-Gleichung in Sturm-Liouville-Form $\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0$ für zwei Funktionen p und q.

3. Aufgabe

Eine Permutation $\sigma \in S^n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ wirkt auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gemäss der Regel

$$x \mapsto \sigma x = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Das Vorzeichen der Permutation $\mathrm{sgn}(\sigma)$ ist definiert durch

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sigma \text{ eine gerade Zahl von Transpositionen enthält} \\ -1, & \text{wenn } \sigma \text{ eine ungerade Zahl von Transpositionen enthält.} \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine antisymmetrische Funktion, sodass

$$f(\sigma x) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(x).$$

Zeigen Sie, dass Fouriertransformierte $\widehat{f}(k)$ gegeben ist durch

$$\widehat{f}(k) = \int_{x_1 \geq \ldots \geq x_n} f(x) \mathrm{det} E(x,k) dx,$$

wobei $E(x,k)$ die Matrix mit den Einträgen $E_{s,t} = e^{-ik_s x_t}$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Identität

$$\mathrm{det} A = \sum_{\sigma \in S^n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{s=1}^{n} A_{s,\sigma(s)} \right).$$

4. Aufgabe

Die Legendre Polynome P_l sind orthogonale Polynome für das Skalarprodukt von $L^2([-1,1])$, die $P_l(1) = 1$ erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass für $t \in [-1,1]$ und $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, gilt:
$$\sum_{l \geq 0} P_l(t) z^l = (1 - 2tz + z^2)^{-1/2}.$$
Hinweis: Entwickeln Sie die rechte Seite in eine Potenzreihe in z. Warum sind die Koeffizienten Polynome in t? Verifizieren Sie die Orthogonalität der Koeffizienten unter Verwendung des elementaren Integrals
$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}} dx = -2\ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) + C$$

(b) *(Multipolentwicklung des Coulomb-Potentials)*
Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}^3$, $|x| < |y|$, gilt:
$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{l \geq 0} \frac{|x|^l}{|y|^{l+1}} P_l\left(\frac{x \cdot y}{|x||y|}\right).$$

(c) Beweisen Sie die Identität
$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i \sin\theta \cos\phi + \cos\theta)^l d\phi.$$
Hinweis: Zeigen Sie, dass $(ix + z)^l$ harmonisch ist, d.h. $\Delta(ix + z)^l = 0$. Die Funktionen $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi), m = -l, \ldots, l$ bilden eine Basis des Vektorraumes der harmonischen homogenen Polynome
$$u(x,y,z) = \sum_{a+b+c=l} u_{a,b,c} x^a y^b z^l$$
vom Grad l mit komplexen Koeffizienten.