MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 12

1. Aufgabe

Berechnen Sie im Sinne der temperierten Distributionen:

(a) $\frac{d^n}{dx^n}|x|$ für $n \geq 1$, wobei hier $|x|$ den Betrag von $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet.
(b) $x\delta(x)$
(c) $x^2\delta'(3x) + x\delta''(x)$
(d) $\widehat{\frac{1}{x-i0^+}} = \mathcal{F}(\mathcal{S}'\text{-}\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{x-i\epsilon})$

2. Aufgabe

(a) Additionstheorem für Kugelfunktionen: Seien

$$x = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
$$x' = (\sin\theta'\cos\phi', \sin\theta'\sin\phi', \cos\theta')$$

$x, x' \in S^2$. Sei γ der Winkel zwischen x und x'. Beweisen Sie, dass dann

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} \overline{Y}_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi).$$

(b) Zeigen Sie nun, dass für

$$x = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$
$$x' = (r'\sin\theta'\cos\phi', r'\sin\theta'\sin\phi', r'\cos\theta'),$$

$x, x' \in \mathbb{R}^3$ mit $r \neq r'$, gilt:

$$\frac{1}{|x-x'|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\overline{Y}_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

wobei $r_< := \min\{|x|,|x'|\}$ und $r_> := \max\{|x|,|x'|\}$.

(c) Die Elektrostatik sagt uns, dass das von der Ladungsverteilung $\rho \in C_0(\mathbb{R}^3)$ erzeugte elektrostatische Potential gegeben ist durch

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(x')}{|x-x'|}dx'.$$

Zeigen Sie, dass man Φ ausserhalb der Ladungsverteilung schreiben kann als

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

mit $x = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ und den sogenannten Multipolmomenten $q_{lm} \in \mathbb{C}$. Geben Sie einen Ausdruck für die q_{lm} an. Ausserhalb der Ladungsverteilung heisst hier für $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$|x| > R := \sup\{|x'| : x' \in \text{supp }(\rho)\}.$$

3. Aufgabe

Sei $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wir fassen f als Distribution auf. Zeigen Sie, dass im Sinne der Distributionen

$$\hat{f} = 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j \delta_j,$$

wobei $\delta_j[\phi] = \phi(j)$ für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, und $\hat{f}_j$ der j–te Fourierkoeffizient von f ist.

4. Aufgabe

Sei $\mu > 0$. Das Yukawa–Potential in drei Dimensionen ist gegeben durch

$$E(x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{-\mu|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3 .$$

(a) Berechnen Sie die Fourier–Transformierte von E.

(b) Zeigen Sie mittels Fouriertransformation, dass in drei Dimensionen das Yukawa–Potential eine Fundamentallösung für den Operator $-\Delta + \mu^2$ ist. Mit anderen Worten, E erfüllt im Sinne der Distributionen die Differentialgleichung

$$(-\Delta + \mu^2)E = \delta.$$

5. Aufgabe

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung eines Teilchens der Masse 1 in einer Dimension mit δ-Potential lautet

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\delta(x)\Big)\psi(x) = E\psi(x),$$

wobei $\lambda < 0$. Für welche Werte von E gibt es eine quadratintegrierbare stetige Funktion $\psi \neq 0$, die auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zweimal stetig differenzierbar ist und obige Gleichung im Distributionssinn erfüllt?

Hinweis: Suchen Sie ψ, so dass $-\psi'' = E\psi$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Hinweis #2: Das Thema dieser Aufgabe wird erst am 13.12. in der Vorlesung behandelt.