MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 2

1. Aufgabe

Sei σ die 2π–periodische Funktion mit $\sigma(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \in [-\pi, 0] \\ 1, & \text{falls } x \in (0, \pi). \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sigma(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2j+1)x\big)}{2j+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$. Zeigen Sie durch explizites Ausrechnen, dass für $x \in \pi\,\mathbb{Z}$ die Gleichung nicht gilt.

(b) Beweisen Sie, dass

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Partialsumme

$$s_{2N+1}(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin (2N+1)x}{2N+1} \right)$$

folgende Gleichung erfüllt:

$$s_{2N+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2(N+1)x'}{\sin x'} dx'.$$

(d) Zeigen Sie, dass das erste lokale Maximum von $s_{2N+1}(x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2N+2}$ angenommen wird und, dass es

$$s_{2N+1}\left(\frac{\pi}{2N+2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + O(\frac{1}{N}) \simeq 1.18$$

beträgt. Also erreicht die Partialsumme für beliebig grosse N einen Wert, der um ca. 9% der Sprunghöhe den Grenzwert übertrifft (Gibbs-Phänomen).

2. Aufgabe

(a) Seien $f(x)$ eine L-periodische, stetige Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Drücken Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $g(x) = f(x+a)$ in Abhängigkeit von a und der Fourierkoeffizienten von f aus.

(b) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Die Faltung der beiden Funktionen ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y) g(x-y) dy.$$

Zeigen Sie, dass $f * g = g * f$ und drücken Sie die Fourierkoeffizienten von $f * g$ in Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten von f und g aus.

3. Aufgabe

Sei $f \in C^2(\mathbb{R} / \mathbb{Z})$. Zeigen Sie die Plancherel-Identität

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2$$