MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 3

1. Aufgabe

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0. \tag{1}$$

Es bezeichne

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass F 2π–periodisch ist. Warum ist die Bedingung (1) nötig?
(b) Drücken Sie die Fourier–Koeffizienten F_n durch die f_n aus.

2. Aufgabe

Sei $L > 0$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ eine reellwertige, L–periodische, glatte Funktion. Finden Sie die Lösung der zweidimensionalen Laplace–Gleichung auf dem halb-unendlichen Zylinder, d.h. eine Funktion

$$u : \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto u(x,y),$$

die für $y > 0$ die Laplace–Gleichung

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

erfüllt, in x L–periodisch ist, die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x)$$

erfüllt und beschränkt ist. Zeigen Sie ferner für alle x

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x')dx'.$$

Hinweis: Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier–Reihe.

3. Aufgabe

Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ eine reelwertige, glatte Funktion mit Periode 1.
Sei $T : \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}, (t,z) \mapsto T(t,z)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf der Halbgerade $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$.

$$\partial_t T = \frac{1}{2}\partial_z^2 T$$

mit Randwert

$$T(t,0) = g(t)$$

und

$$\lim_{z\to\infty} T(z,t) < \infty.$$

Wir betrachten T als Temperatur im Erdinneren, wobei $z = 0$ die Erdoberfläche repräsentiert. Dann ist g die Oberflächentemperatur.

(a) Bestimmen Sie $T(t,z)$ in Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten g_n von g.
(b) Sei $g(t) = -\cos(2\pi t)$ und sei ein Keller in einer Tiefe $z = \sqrt{\pi/2}$ gebaut. Wann ist es in diesem Keller am kältesten?

4. Aufgabe

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto v(x, t)$ eine Lösung für das Anfangswertproblem der eindimensionalen Wellengleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0 \quad \infty < x < \infty, t \geq 0, \\ &v(x, 0) = h(x), \quad \partial_t v(x, 0) = k(x) \quad \infty < x < \infty. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie durch eine geeignete Koordinatentransformation, dass die Lösung gegeben ist durch einen Ausdruck der Form

$$v(x, t) = F(x + t) + G(x - t).$$

(b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch

$$v(x, t) = \frac{h(x + t) + h(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} k(s) ds.$$

5. Aufgabe

Es seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Wenn $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, zeige, dass

$$\{f^{-1}(E) | E \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

(b) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, zeige, dass

$$\{E \subseteq Y | f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

6. Aufgabe

Sei μ eine Mass auf X und $\Omega \subset X$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Weiter sei $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie messbarer Mengen $\Omega_k \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega_k) \geq c_0 > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Die Menge

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geq l} \Omega_k \right)$$

ist messbar mit $\mu(A) \geq c_0$. *Hinweis:* Sie dürfen annehmen, dass für ein beliebiges Mass μ die messbaren Teilmengen einer Menge eine σ-Algebra bilden.