MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 4

1. Aufgabe

Berechnen Sie folgende Limites von Integralen. Darf der Limes in das Integral gezogen werden?

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi (1-\sin x)^n dx$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n}{1+nx^2}dx$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n}dx$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)dx$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}(x)dx$$

2. Aufgabe

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Lebesgue integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $(\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}$.
(b) $\widehat{f(\alpha\cdot)}(k) = |\alpha|^{-n}\hat{f}(k/\alpha)$, falls $\alpha \neq 0$.
(c) $\hat{f}_y(k) = \hat{f}(k)e^{-iky}$, $f_y(x) = f(x-y)$ und $y \in \mathbb{R}^n$.
(d) $f\hat{g}, \hat{f}g$ sind integrierbar und $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}dx$
(e) $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{\bar{f}}(-k)$
(f) $\widehat{\partial_j f}(k) = ik_j\hat{f}(k)$ falls $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Aufgabe

Sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ und sei f_d die Funktion
$$f_d(x) = \frac{1}{d}(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2) + \ldots + \cos(2\pi x_d))$$

(a) Zeigen Sie:
$$\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \frac{1}{1-f_d(x)}dx \begin{cases} = \infty & \text{für } d = 1,2 \\ < \infty & \text{für } d \geq 3 \end{cases}$$
Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung um den Punkt $x_i = 0, i = 1, \ldots, d$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=0}^\infty \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} f_d(x)^n dx$$
für $d \geq 3$ konvergiert und für $d \leq 2$ divergiert.
Hinweis: Betrachten Sie für $0 < \epsilon < 1$
$$\sum_{n=0}^\infty \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \epsilon^n f_d(x)^n dx$$
den Limes $\epsilon \to 1$. Wenden Sie den Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz an.

4. Aufgabe

Seien $g, h : \mathbb{R}/L\,\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ reelwertige, integrierbare, L-periodische Funktionen. Zeigen Sie

(a)
$$|g_n - h_n| \leq \frac{1}{L}\int_0^L |g(t) - h(t)|dt \quad \text{for all } n,$$

(b)
$$|(s_N g)(x) - (s_N h)(x)| \leq \frac{2N+1}{L}\int_0^L |g(t) - h(t)|dt \quad \text{for all } N \geq 0.$$

5. Aufgabe

Sei $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ der Dirichlet-Kern

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n t} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}, & t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ 2N+1, & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 |D_N(t)|dt \geq \frac{4}{\pi^2}\log(2(n+1))$$

(b) Sei $h_N(s) = \operatorname{sgn} D_N(s)$, wobei $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Zeigen Sie

(i) h_N ist konstant auf dem Intervall $(\frac{r}{2(2N+1)}, \frac{r+1}{2(2N+1)}), r \in \mathbb{Z}$,

(ii) $|h_N(s)| \leq 1$ für alle s,

(iii) $(s_N h_N)(0) \geq \frac{4}{\pi^2}\log(2(N+1))$.