MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 5

1. Aufgabe

(a) Berechnen Sie die Fourier–Transformation von
$$f(x) = \sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}.$$

(b) Berechnen Sie die Fourier–Transformation von
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Berechnen Sie die Fourier–Transformation von
$$f(x) = e^{-|x|}\cos(x).$$

(d) Sei $a > 0$. Berechnen Sie die Fourier–Transformation von
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & |x|, |y| \leq a \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(e) Berechnen Sie die Fourier–Transformation von
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(f) Berechnen Sie die Fourier–Transformation von
$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2-xy}.$$

2. Aufgabe

(a) Sei $1 \leq p < \infty$, $t \in [0,1]$ und $a, b \geq 0$. Zeigen Sie
$$(ta + (1-t)b)^p \leq ta^p + (1-t)b^p.$$

(b) Sei $1 \leq p < \infty$. Die L^p–Norm einer Funktion $f \in L^p(\mathbb{R})$ ist gegeben durch
$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Seien $f, g \in L^p(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ und
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

3. Aufgabe

Das n-te Hermite-Polynom $H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Zeigen Sie:

(a) die Entwicklung

$$f(x,y) := e^{2xy-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n.$$

(b) die Rekursionsformeln

(i) $H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) = 0$

(ii) $H_n'(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0$

(iii) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$

für alle $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

4. Aufgabe

Sei $\mathbb{C}^n$ der Vektorraum der n-dimensionalen, komplexen Spaltenvektoren $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})^T$ mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle v, w\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} v_j \overline{w_j}$.
Dann sind die l^2- und l^∞-Normen auf $\mathbb{C}^n$ gegeben durch $|v|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $|v|_\infty = \max_j |v_j|$.
Der charakteristische Vektor $\chi(v)$ von v hat Einträge

$$\chi(v)_j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } v_j \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } v_j = 0 \end{cases}$$

und der Träger von v ist die Menge $\operatorname{supp}(v) = \{j : 0 \leq j < n | v_j \neq 0\}$ mit $|\operatorname{supp}(v)|$ Elementen.
Sei $F[n]$ die komplexe Matrix mit Einträgen

$$F[n]_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\big(-\frac{2\pi ijk}{n}\big) \quad j,k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Dann ist $\hat{v} = F[n]v \in \mathbb{C}^n$ die diskrete Fouriertransformation von v. Die Komponenten

$$\hat{v}_j = (F[n]v)_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \exp\big(-\frac{2\pi ijk}{n}\big)$$

sind die diskreten Fourierkoeffizienten von v.

(i) Berechnen Sie die diskreten Fouriertransformationen der folgenden Vektoren:

(a) $u_k = 1$ für alle k

(b) $w_k = k$ für alle k

(ii) (a) Zeigen Sie, dass $F[n]$ eine unitäre Matrix ist.

(b) Beweisen Sie die Plancherel-Identität für die diskrete Fouriertransformation

$$|v|_2^2 = |\hat{v}|_2^2$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$|v|_2^2 \leq |v|_\infty^2 |\operatorname{supp}(v)|$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$|v|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\hat{v}_j| \chi(\hat{v})_j$$

(e) Beweisen die Heisenbergsche Unschärferelation für die diskrete Fouriertransformation

$$|\operatorname{supp}(v)||\operatorname{supp}(\hat{v})| \geq n$$

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.