MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 6

1. Aufgabe

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit negativem Imaginärteil und $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Beweisen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(k+\alpha)^n} e^{ikx} dk = 2\pi i^n H(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-i\alpha x},$$

wobei H die Heaviside–Funktion ist.

2. Aufgabe

Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, $g \in C_0^1(\mathbb{R})$ und $c > 0$ eine Konstante. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \end{cases}$$

mittels Fourier–Transformation und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Serie 3 Aufgabe 4.

3. Aufgabe

Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen im Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen:

(a) $f(x) = e^{-\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}^n$
(b) $f(x) = e^{-\sqrt{1+\|x\|^2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$
(c) $f(x) = \frac{\phi(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$
(d) $f(x) = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{\cosh(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
(e) $f(x) = e^{-x_1^2+x_1x_2-x_2^2}$, $x \in \mathbb{R}^2$
(f) $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$

4. Aufgabe

Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sodass $\|\psi\|_2 = 1$. Zeigen Sie

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} k^2 |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Wenden Sie partielle Integration und dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf das Integral $\int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |\psi(x)|^2 dx$ an.