MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 7

1. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto \phi(0)$$

stetig ist.

(b) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$\omega_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

stetig ist.

2. Aufgabe

Sei $u(x, y, z)$ eine C^2–Funktion definiert auf einem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^3$ und

$$\tilde{u}(r, \theta, \phi) := u(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$$

(u in Kugelkoordinaten). Zeigen Sie:

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) = \left(\sin\theta \cos\phi \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\cos\theta \cos\phi}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} \right)(r, \theta, \phi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) = \left(\sin\theta \sin\phi \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\cos\theta \sin\phi}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} \right)(r, \theta, \phi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) = \left(\cos\theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right)(r, \theta, \phi)$$

(b)

$$\Delta u(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \big(r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \big) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \big(\sin\theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \big) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \phi^2} \right) \right)(r, \theta, \phi)$$

Man sagt daher, dass der dreidimensionale Laplace–Operator in Kugelkoordinaten durch

$$\Delta_K = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \big(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \big) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \big(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \big) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

gegeben ist.

3. Aufgabe

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir wollen den Lösungsraum der Besselschen Differentialgleichung bestimmen:

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} u(z) + z \frac{d}{dz} u(z) + (z^2 - \alpha^2) u(z) = 0.$$

Für $z \in (0, \infty)$ und $\alpha \neq -1, -2, \dots$ definieren wir

$$J_\alpha(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2j}.$$

(a) Zeigen Sie, dass J_α die Besselgleichung für $\alpha \neq -1, -2, \dots$ erfüllt. Zeigen Sie, dass für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ sowohl J_α als auch $J_{-\alpha}$ die Besselgleichung erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z).$$

(c) Zeigen Sie die Relationen:
 (i) $J'_\alpha(z) + \frac{\alpha}{z} J_\alpha(z) = J_{\alpha-1}(z)$,
 (ii) $J'_\alpha(z) - \frac{\alpha}{z} J_\alpha(z) = -J_{\alpha+1}(z)$,
 (iii) $J_{\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z) = \frac{2\alpha}{z} J_\alpha(z)$,
 (iv) $J_{\alpha-1}(z) - J_{\alpha+1}(z) = 2J'_\alpha(z)$.

(d) ($\star$) Die Wronski-Determinante zweier komplexwertiger Funktionen u und v auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch $W(u,v) := uv' - vu'$. Zeigen Sie, dass $W(J_\alpha(z), J_{-\alpha}(z)) = -\frac{2\sin(\alpha\pi)}{\pi z}$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(e) Sei $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen J_α und $J_{-\alpha}$ linear unabhängig sind.

(f) Für $n \in \{-1, -2, \dots\}$ definieren wir $J_n = \lim_{\alpha \to n} J_\alpha$. Zeigen Sie: J_n löst die Besselgleichung und $J_n = (-1)^n J_{-n}$.

Bemerkung: Durch

$$N_\alpha(x) = \frac{\cos(\pi\alpha) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}$$

wird für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ die sogenannte Neumann–Funktion definiert. Durch $N_n := \lim_{\alpha \to n} N_\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$ kann man die Definition auf alle $\alpha \in \mathbb{C}$ erweitern. Man kann zeigen, dass die Funktionen N_α und J_α für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ die entsprechende Besselgleichung lösen und linear unabhängig sind. Die Details dazu stehen in CourantHilbert, Methods of Mathematical Physics, Kapitel VII, Abschnitt 9.

4. Aufgabe

Der allgemeine Punkt $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ lässt sich in Kugelkoordinaten $(r, \phi, \theta_3, \dots, \theta_d)$, mit $r \geq 0, \theta_i \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ ausdrücken als:

$$\begin{aligned}
x_d &= r \cos\theta_d \\
x_{d-1} &= r \sin\theta_d \cos\theta_{d-1} \\
x_{d-2} &= r \sin\theta_d \sin\theta_{d-1} \cos\theta_{d-2} \\
&\vdots \\
x_3 &= r \sin\theta_d \cdots \sin\theta_4 \cos\theta_3 \\
x_2 &= r \sin\theta_d \cdots \sin\theta_4 \sin\theta_3 \sin\phi \\
x_1 &= r \sin\theta_d \cdots \sin\theta_4 \sin\theta_3 \cos\phi
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Kugelkoordinaten den Raum $\mathbb{R}^d$ parametrisieren, wobei der Unterraum $x_1 = x_2 = 0$ nicht eindeutig parametrisiert ist.

(b) Zeigen Sie mittels Induktion nach d:

$$\det \frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(r, \phi, \theta_3, \dots, \theta_d)} = (-1)^d r^{d-1} (\sin\theta_d)^{d-2} (\sin\theta_{d-1})^{d-3} \cdots \sin\theta_3.$$

5. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion implizit definiert durch die Kepler-Gleichung

$$x = f(x) - \epsilon \sin(f(x)), \quad 0 < \epsilon \leq 1.$$

Die Kepler-Gleichung beschreibt die elliptischen Bahnen von Himmelskörpern. Sie setzt die sogenannte mittlere Anomalie x in Beziehung zur exzentrischen Anomalie f und erlaubt die Berechnung des Winkelabstandes eines Himmelskörpers zur Periapsis als Funktion der Zeit.

(a) Zeigen Sie, dass f eine stetige, ungerade Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, sodass

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$$

(b) Zeigen Sie, dass $\epsilon \sin(f(.)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stetige Funktion von beschränkter Variation ist.

(c) Bestimmen Sie f.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.4. aus dem Skript und die Identität

$$J_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(s \sin(t) - nt) dt,$$

wo J_n die n-te Bessel-Funktion erster Gattung ist.