MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 8

1. Aufgabe

Seien $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ und $\mathbb{C}_\alpha = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir sagen eine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ ist von exponentieller Ordnung, wenn gilt $|f(t)| \leq ae^{bt}, \exists a, b \in \mathbb{R}$.

Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion exponentieller Ordnung, sodass $|F(t)| \leq Ce^{s_0 t}, C, s_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}F$ von F definiert durch das Integral

$$\mathcal{L}F(s) = \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt.$$

(i) Zeigen Sie:
  (a) $\mathcal{L}F$ definiert eine Funktion $\mathbb{C}_{s_0} \to \mathbb{C}$.
  (b) $\mathcal{L}\{aF_1 + bF_2\} = a\mathcal{L}F_1 + b\mathcal{L}F_2$, für stetige Funktionen exponentieller Ordnung F_1 und F_2, wenn die Laplacetransformierte existiert.
  (c) $\mathcal{L}\{e^{-bt}F(t)\}(s) = \mathcal{L}F(s + b)$, wenn die Laplacetransformierte existiert.

(ii) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $\mathcal{L}F(s)$ der Funktion $F(t) = t$. Für welche s ist die Laplacetransformierte definiert?

2. Aufgabe

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion von

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R\}.$$

(b) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt

$$\frac{d}{dz}\big(z^n J_n(z)\big) = z^n J_{n-1}(z),$$

wobei J_n die Besselfunktion der Ordnung n ist.

(c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion von

$$D_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R\}.$$

3. Aufgabe

Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Schwartzfunktion. Bestimmen Sie eine Lösung $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, (t, x) \mapsto \psi(t, x)$ des Cauchy-Problems für die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi(t, x) + \frac{1}{2}\Delta\psi(t, x) &= 0, \quad t > 0 \\ \psi(0, x) &= \phi(x). \end{aligned}$$