MMP I – HERBSTSEMESTER 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 9

1. Aufgabe

Verwenden Sie die Parsevalsche Identität für Fourierreihen, um

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

zu berechnen.
Hinweis: Integrieren Sie die Sägezahnfunktion.

2. Aufgabe

(a) Sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$|\widehat{f}(k)| \leq c.$$

(b) Sei $g \in C_0^s(\mathbb{R}^n)$ eine s mal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass ein $d \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|\widehat{g}(k)| \leq \frac{d}{(1+|k|)^s}.$$

3. Aufgabe

Sei $L > 0$. Wir betrachten den Hilbertraum $L^2([0,L])$ mit Skalarprodukt $(u,v) = \int_0^L u(x)\overline{v(x)}dx$. In ihm liegt der dichte Unterraum $C^\infty([0,L])$. Es bezeichne $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} : C^\infty([0,L]) \to C^\infty([0,L])$ den Laplace–Operator.

(a) Seien $u, v \in C^\infty([0,L])$ mit $u(0) = u'(L) = 0$ und $v(0) = v'(L) = 0$ ("gemischte Randbedingungen"). Zeigen Sie:
  (i) $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$
  (ii) $(\Delta u, u) \leq 0$ und $(\Delta u, u) < 0$ falls $u \neq 0$.

(b) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Δ mit Randbedingung $u(0) = 0, u'(L) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die normierten Eigenfunktionen aus (b) eine orthonormierte Basis in $L^2([0,L])$ bilden.
Hinweis: Satz 3.1 aus Kapitel 3.

4. Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x\, u_x(x,t) + u_t(x,t) = t\, u(x,t),$$
$$u(x,0) = x^2,$$

wobei x eine reelle Variable ist und $t \geq 0$.

5. Aufgabe

Das elektromagnetische Feld im Vakuum gehorcht den Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0, \ \text{div } B = 0, \ \text{(Homogene Gl.)}$$
$$\text{rot } B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \ \text{div } E = 0, \ \text{(Inhomogene Gl.)}$$

wobei das elektrische Feld $E(x,t)$ und das magnetische Feld $B(x,t)$ Funktionen auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R}^3$ sind.

(a) Zeigen Sie, dass jede Komponente des elektrischen Feldes E und des magnetischen Feldes B der drei-dimensionalen Wellengleichung genügen.

(b) Schreiben Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum als Gleichungen für die Fouriertransformierten

$$\hat{E}(k,t) = (\hat{E}_1(k,t), \hat{E}_2(k,t), \hat{E}_3(k,t)), \qquad \hat{B}(k,t) = (\hat{B}_1(k,t), \hat{B}_2(k,t), \hat{B}_3(k,t))$$

des elektromagnetischen Felds bezüglich der Raumkoordinaten, unter der Annahme, dass alle Komponenten Schwartzfunktionen sind.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $(\text{rot } E)^\wedge(k,t) = ik \times \hat{E}(k,t)$

(c) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung $\hat{E}(k,t), \hat{B}(k,t)$ die folgende Form hat:

$$\hat{E}(k,t) = a(k)\cos(|k|ct) + b(k)\sin(|k|ct),$$
$$\hat{B}(k,t) = \frac{ik}{|k|} \times (b(k)\cos(|k|ct) - a(k)\sin(|k|ct)),$$

wobei $a(k), b(k)$ zwei vektorwertige Funktionen sind. Welche Bedingungen müssen $a(k), b(k)$ erfüllen?