Fourierkoeffizienten und Fouriertransformation mittels Residuen

Beispiel einer Fouriertransformation:

Wir berechnen die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da diese Funktion reellwertig ist, ist $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$. Deswegen genügt es, $\hat{f}(-k)$ für $k \geq 0$ zu berechnen. Nach Definition ist

$$\hat{f}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \tfrac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx$$

Für $R > 1$ sei Γ_R der Halbkreis in der oberen Halbebene, der die Punkte R und $-R$ auf verbindet. Nach dem Residuensatz ist

$$\int_{-R}^{R} \tfrac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=i}\big(\tfrac{e^{ikz}}{z^2+1}\big) - \int_{\Gamma_R} \tfrac{e^{ikz}}{z^2+1}\, dz$$

Nun ist

$$\mathrm{Res}_{z=i}\big(\tfrac{e^{ikz}}{z^2+1}\big) = \mathrm{Res}_{z=i}\big(\tfrac{e^{ikz}}{(z+i)(z-i)}\big) = \tfrac{e^{-k}}{2i}$$

Ausserdem ist $|z^2+1| \geq \frac{1}{2}|z|^2$, wenn $|z| \geq 2$. Also ist für $R \geq 2$

$$\Big| \int_{\Gamma_R} \tfrac{e^{ikz}}{z^2+1}\, dz \Big| \leq (\text{Länge von } \Gamma_R) \cdot \sup_{|z|=R} \big|\tfrac{e^{ikz}}{z^2+1}\big| \leq \tfrac{2\pi}{R}$$

Folglich ist $\hat{f}(-k) = \pi\, e^{-k}$; und damit im Allgemeinen

$$\hat{f}(k) = \pi\, e^{-|k|}$$

Ein Beispiel zur Berechnung von Fourierkoeffizienten:

Sei f die 2π–periodische Funktion $f(x) = \frac{1}{3-\cos x}$. Da f reellwertig ist, gilt für die Fourier–koeffizienten $f_{-n} = \overline{f_n}$. Deswegen genügt es wieder, f_{-n} für $n \geq 0$ zu berechnen. Mit der Substitution $z = e^{ix}$, $dx = \frac{dz}{iz}$ ist

$$f_{-n} = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{e^{inx}}{3-\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}\, dx = \tfrac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \tfrac{z^n}{6-z-\frac{1}{z}}\, \tfrac{dz}{iz} = -\tfrac{1}{\pi i} \int_{|z|=1} \tfrac{z^n}{z^2-6z+1}\, dz$$

Dabei wird über die positiv orientierte Kreislinie $|z| = 1$ integriert. Weil $n \geq 0$, sind die einzigen Pole des Integranden die Nullstellen $z_\pm = 3 \pm 2\sqrt{2}$ des Nenners, und davon liegt nur z_- im Inneren der Kreislinie $|z| = 1$.

Nach dem Residuensatz ist also

$$f_{-n} = -2\,\mathrm{Res}_{z=z_-}\left(\tfrac{z^n}{z^2-6z+1}\right) = -2\,\mathrm{Res}_{z=z_-}\left(\tfrac{z^n}{(z-z_+)(z-z_-)}\right) = -2\,\tfrac{z_-^n}{z_- z_+} = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,(3-2\sqrt{2})^n$$

Insgesamt ergibt sich

$$f_n = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,(3-2\sqrt{2})^{|n|}$$