Probeprüfung
Lineare Algebra I/II für D-MAVT - Musterlösungen

1. $\mathcal{P}_2$ sei der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von $\mathcal{P}_2$?

(a) $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$

$\surd$ (b) $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$

(c) $\{x^2-1, x^2+x, x+1, x-1\}$

(d) $\{(x+1)(x-1), x^2+1, 2x^2\}$

Erklärung: Da $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ ist, ist (c) keine Basis. Für (a) gibt es eine nicht-triviale Linearkombination $(x+1)^2+(x-1)^2-2(x^2+1)=0$, weshalb es nicht um eine Basis handelt. Für (d) gibt es ebenfalls eine nicht-triviale Linearkombination $(x+1)(x-1)+x^2+1-2x^2=0$ daher ist auch dies keine Basis. Bei (b) sieht man sofort $\mathrm{span}((x+1)^2,(x-1)^2,(x+2)^2) = \mathrm{span}(x^2+1, x, x^2+4x+4) = \mathrm{span}(x^2+1, x, 1) = \mathrm{span}(x^2, x, 1)$, es handelt sich also um eine Basis.

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden Matrizen ist halbeinfach?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\checkmark$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) Keine der obigen Matrizen ist halbeinfach.

Erklärung: Die Matrix bei (c) ist symmetrisch, also diagonalisierbar, also halbeinfach. Für (a) hat der Eigenwert 0 algebraische Vielfachheit 3 und geometrische Vielfachheit 1. Für (b) hat der EW 2 algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1. Die beiden Matrizen sind deshalb nicht halbeinfach.

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Drei Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn die drei Pärchen $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}$ linear unabhängig sind).

(b) Jeder Vektor des Vektorraums $\mathbb{R}$ bildet eine Basis für diesen eindimensionalen Raum.

$\surd$ (c) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im $\mathbb{R}^3$. Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ linear unabhängig.

(d) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im $\mathbb{R}^3$. Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ linear unabhängig.

Erklärung: (a) ist sicher falsch, denn die Pärchen der linear abhängigen Menge $((1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top)$ sind linear unabhängig. (b) ist ebenfalls falsch, denn der Vektor 0 ist nicht erzeugend. Auch (d) ist falsch, denn $v_1 + v_2 - (v_1 + v_2) = 0$ ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. (c) ist hingegen richtig: Wir wissen, dass $v_1 \times v_2 \neq 0$ orthogonal zu v_1 und v_2 bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$ ist. Gram-Schmidt in $\operatorname{span}(v_1, v_2)$ liefert drei orthogonale, von 0 verschiedene, also linear unabhängige Vektoren.

Bitte wenden!

4. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $(0, 1, 1)^\top$

$\surd$ (b) $(1, -2, 1)^\top$

(c) $(-2, 1, 1)^\top$

(d) $(0, 3, 2)^\top$

Erklärung: Aus direkter Berechnung bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor in (b) ist deshalb ein Eigenvektor (zum Eigenwert -1).

Siehe nächstes Blatt!

5. Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -12 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

(a) $2, 2, 7$

$\surd$ (b) $2, 3, 6$

(c) $-2, 3, 6$

(d) $2, -12, 2$

Erklärung: Berechnen wir das charakterische Polynom der Matrix:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ -12 & 2-\lambda & -6 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)(7-\lambda)+4] = (2-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda).$$

Es folgt daraus, dass (b) richtig ist.

Bitte wenden!

6. Welche der folgenden Aussage ist wahr?

(a) Es gibt eine Matrix A mit charakteristischen Polynom $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$ welche invertierbar ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrizen A und B. Dann ist v auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrix AB.

(c) Ist v Eigenvektor zum Eigenwert -1 und w Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix A, so ist $v + w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ($v + w$ liegt also im Kern von A).

√ (d) Es seien v_1, v_2 zwei Eigenvektoren der Matrix A mit **unterschiedlichen** Eigenwerten. Dann ist $v_1 + v_2$ **nie** ein Eigenvektor von A.

Erklärung: (a) ist falsch, denn ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist eine nichttriviale Lösung von $Ax = 0$. (b) ist ebenfalls falsch, denn $ABv = 4v$. Auch (c) ist falsch, denn $A(v + w) = -v + w \neq 0$. (d) ist hingegen richtig: Seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die entsprechenden Eigenwerte. Da die Eigenwerte unterschiedlich sind, sind v_1 und v_2 linear unabhängig. Der Vektor $v_1 + v_2$ ist Eigenvektor von A genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, derart dass $A(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$. Nehmen wir an, dass $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor ist. Dann gilt

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit folgt, dass $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$, ein Widerspruch.

Siehe nächstes Blatt!

7. $\mathcal{P}_4$ sei der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 4. Auf $\mathcal{P}_4$ sei das Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

gegeben. Wählen Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$.

(a) $\{1, 3x^4 - \frac{3}{5}\}$

✓ (b) $\{1, \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}\}$

(c) $\{1, 3x^4 - \frac{3}{4}\}$

(d) $\{1, \frac{4}{15}x^4 - \frac{3}{5}\}$

Erklärung: (a) ist falsch, denn

$$\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx = \frac{16}{25} \neq 1$$

(c) ist falsch, denn

$$\int_0^1 3x^4 - \frac{3}{4}dx = -\frac{3}{20} \neq 0$$

(d) ist falsch, denn

$$\int_0^1 \frac{4}{15}x^4 - \frac{3}{5}dx = -\frac{41}{75} \neq 0$$

(b) hingegen ist richtig, denn

$$\int_0^1 \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}dx = 0, \int_0^1 \left(\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}\right)^2 dx = 1$$

Alternativ kann man die Vektoren $p_1(x) = 1, p_2(x) = 3x^4$ auch Gram-Schmidt unterwerfen um die Antwort zu finden: p_1 ist bereits normiert. Dann ist

$$\tilde{p}_2 = p_2 - \langle p_2, p_1\rangle p_1 = 3x^4 - \int_0^1 3x^4\,dx = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

orthogonal zu p_1. Nun wird $\tilde{p}_2$ noch normiert:

$$\hat{p}_2 = \frac{\tilde{p}_2}{\|\tilde{p}_2\|} = \frac{3x^4 - \frac{3}{5}}{\sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx}} = \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}.$$

Bitte wenden!

8. Für welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist $\langle x, y\rangle := \frac{1}{3}x^\top Ay$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

✓ (d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Erklärung: Die Matrix bei (a) ist nicht symmetrisch, daher kann es sich nicht um eine Skalarprodukt handeln. Die Matrix bei (b) hat einen negativen Eigenwert: Für $x = (0, 1, 0)$ wird daher $\langle x, x\rangle < 0$. Die Matrix bei (c) ist singulär, hat also den Eigenwert 0. Für einen Eigenwert x zum Eigenwert 0 ist daher $\langle x, x\rangle = 0$. Für (d) gelten deutlich Symmetrie (aus $x^\top Ay = (x^\top Ay)^\top = y^\top A^\top x = y^\top Ax$) und Bilinearität. Berechnen wir das charakterische Polynom von A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 - 3(4-\lambda) - 2 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 50 \\ &= -(\lambda-5)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind deshalb 5 und 2. Das Produkt $\langle x, x\rangle$ ist positiv definit, denn alle Eigenwerte sind streng grösser als 0, somit liegt ein Skalarprodukt vor.

9. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht scheiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

$\checkmark$ (b) Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

(c) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(d) In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

Erklärung: (a) ist falsch, wie das Beispiel $f(x) = x, g(x) = -x$, $a = -1, b = 1$, zeigt. (b) ist richtig: Für f ungerade und g gerade gilt $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$. Die Funktion $x \mapsto f(x)g(x)$ ist deshalb ungerade. Es folgt daraus, dass $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ ist. Das heisst, dass f und g orthogonal sind. (c) ist wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz falsch. (d) ist falsch, denn paarweise orthogonale Einheitswektoren sind linear unabhängig.

Bitte wenden!

10. $\mathcal{P}_2$ sei der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Welche der folgenden Matrizen stellt die Abbildung $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, p(x) \mapsto 2p(x) + p'(x)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{2, x+1, x^2-1\}$ dar?

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

√ (b) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Erklärung: Wir bestimmen das Bild von jedem Vektor der Basis $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} 2 &\mapsto 4 = 2 \cdot 2, \\ x+1 &\mapsto 2(x+1) + 1 = 2(x+1) + \frac{1}{2} \cdot 2, \\ x^2 - 1 &\mapsto 2(x^2-1) + 2x = 2(x^2-1) + 2(x+1) - 1 \cdot 2. \end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix erhält man indem man die Koordinatenvektoren dieser Bilder als Spalten verwendet: Demnach ist (b) richtig.

Siehe nächstes Blatt!

11. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -7 \\ 0 & -5 & 13 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hat 0 als Eigenwert?

(a) A_1

(b) A_2

√ (c) A_3

(d) Keine

Erklärung: A_1 hat die Eigenwerte $3, 9, 11$. Mit dem Gauss-Verfahren sieht man sofort, dass auch A_2 regulär ist, also 0 nicht als Eigenwert hat. Hingegen ist (c) singulär, hat also Eigenwert 0: Das Gauss-Verfahren für A_3 liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die letzte Zeile nur 0 als Enträge hat, ist A_3 singulär.

Bitte wenden!

12. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

$\checkmark$ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Erklärung: Um eine Basis des Bildes zu bestimmen, müssen wir zuerst den Rang der Matrix finden. Mit dem Gauss-Verfahren bekommt man:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Bild hat deshalb Dimension 2. Je zwei linear unabhängige Spalten der Matrix ergeben daher eine Basis des Bildes. Daher ist (d) richtig. (a) ist sicher falsch, denn dies sind 3 Vektoren. Die Vektoren in (b) und (c) liegen nicht im Bild.

Siehe nächstes Blatt!

13. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

√ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

Erklärung: Es folgt aus der Lösung der vorstehenden Aufgabe, dass $\dim \mathrm{Kern} = 2$ ist. Da der Kern eine Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist, sind deshalb nur (b) und (c) möglich. Eine direkte Berechnung bestätigt, dass die Vektoren in (b) im Kern enthalten sind.

Bitte wenden!

14. Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $F\binom{2}{3} = \binom{1}{4}$ und $F\binom{3}{5} = \binom{1}{1}$. Dann ist $F\binom{3}{3} = \ldots$

√ (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 21 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

(d) Es gibt nicht genug Information, um $F\binom{3}{3}$ zu bestimmen.

Erklärung: Da $\binom{2}{3}$ und $\binom{3}{5}$ linear unabhängig sind, können wir $\binom{3}{3}$ als Linearkombination von denen schreiben:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2a + 3b &= 3, \\ 3a + 5b &= 3. \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist $a = 6, b = -3$. Es folgt:

$$F\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6F\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3F\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

15. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) Gilt $P^2 = P$, so kann die Matrix P Eigenwerte $0, 1$ und -1 besitzen.

(b) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.

(c) Hat die symmetrische 2×2-Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte, so ist die Lösungsmenge von $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ eine Ellipse in $\mathbb{R}^2$.

√ (d) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1 \neq 0$. Dann hat A eine Eigenbasis.

Erklärung: (a) ist falsch, denn wegen $Px = \lambda x$, also $\lambda^2 x = P^2 x = Px = \lambda x$, folgt $\lambda \in \{0, 1\}$. (b) ist ebenso falsch, so ist etwa die Matrix in 2(b) regulär aber nicht halbeinfach, also nicht diagonalisierbar. Auch (c) ist falsch, wie das Beispiel $A = \operatorname{diag}(1, -1)$ zeigt. Hingegen ist (d) richtig: Da die drei Eigenwerte verschiedenen sind, ist A einfach und besitzt somit eine Eigenbasis.

Bitte wenden!

16. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{\binom{1}{-1}, \binom{3}{5}\right\}$ die Koordinaten $\binom{1}{1}$. Die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis sind ...

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

√ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Erklärung: Es gilt $v = 1 \cdot \binom{1}{-1} + 1 \cdot \binom{3}{5} = \binom{4}{4}$.

Siehe nächstes Blatt!

17. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Die lineare Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $p(x) \mapsto 2p(x) - p'(x) + p''(x)$ hat die Eigenwerte ...

(a) 0 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

√ (b) 2 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

(c) 2 mit algebraischer Vielfachheit und geometrischer Vielfachheit 4.

(d) 2 mit geometrischer Vielfachheit 4 und algebraischer Vielfachheit 1.

Erklärung: Die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ ist gegeben durch:

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass das charakterische Polynom $P(\lambda) = (2-\lambda)^4$ ist, so dass $\mathcal{F}$ nur den Eigenwert 2 mit alg. Vf. 4 hat. Um die geom. Vf. zu bestimmen, müssen wir den Rang der Matrix

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finden. Dieser Rang ist deutlich gleich 3. Es folgt daraus, dass die geom. Vf. gleich 1 ist.

Bitte wenden!

18. Sei P Projektion auf die $x_1x_2x_3$-Hyperebene in $\mathbb{R}^4$. Bezüglich der Standardbasis hat P also die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

(a) Die Determinante der Darstellungsmatrix von P hängt von der gewählten Basis ab.

(b) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$, so dass die Darstellungsmatrix von P bezüglich $\mathcal{B}$ die Determinante 1 hat.

(c) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$, so dass für die Darstellungsmatrix A von P bezüglich $\mathcal{B}$ gilt $A^2 \neq A$.

$\surd$ (d) Die Spur der Darstellungsmatix von P bezüglich jeder Basis beträgt 3.

Erklärung: Die Darstellungsmatrix von P bezüglich einer beliebigen Basis und die bezüglich der Standardbasis sind ähnlich. Da ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben, ist (d) richtig.

19. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $v_0 \in \mathbb{R}^3$, und definiere rekursiv $v_k := Av_{k-1}$. Sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) Man kann v_0 so wählen, dass $\|v_k\|$ beliebig gross wird, wenn $k \to \infty$ strebt.

(b) Es gibt $v_0 \neq 0$ so dass $v_{k+2} = v_k$ für alle k.

√ (c) Es gibt eine Zahl $K > 0$ und $v \in \mathbb{R}^3$, derart dass $v_k = v$ für alle $k \geq K$.

(d) Es gibt v_0 so dass v_k für $k \to \infty$ gegen ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ konvergiert.

Erklärung: Durch einfache Induktion folgt es, dass $v_k = A^k v_0$ ist für alle $k \geq 0$. Da $A^3 = 0$ ist, haben wir $v_k = 0$ für alle $k \geq 3$. (c) ist dann richtig für $K = 3$ und $v = 0$.

20. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sodass $Ax = 0$ **nur** die triviale Lösung hat. Dann gilt:

√ (a) $\dim(\text{Bild}\, A) = n$

(b) $\dim(\text{Bild}\, A) = 0$

(c) $\dim(\text{Kern}\, A) = m$

(d) $\dim(\text{Bild}\, A) + \dim(\text{Kern}\, A) = mn$

Erklärung: Wenn $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat, dann sind $\text{Kern}\, A = \{0\}$ und deshalb $\dim(\text{Kern}\, A) = 0$. Aus der Identität $\dim(\text{Bild}\, A) + \dim(\text{Kern}\, A) = n$ folgt, dass $\dim(\text{Bild}\, A) = n$ ist.

Bitte wenden!

21. [**10 Punkte**] Betrachten Sie die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$, gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

a) [**3 Punkte**] Finden Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie eine Basis von Bild A und Kern A.

c) [**3 Punkte**] Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{e_1 + 2e_2, -e_3, e_2 + e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Finden Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ (d.h. die Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ auf Koordinaten bezüglich $\mathcal{E}$ abbildet) und ihre Inverse T^{-1}.

d) [**2 Punkte**] Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[F]_{\mathcal{B}}$ von F bezüglich $\mathcal{B}$.

Erklärung:

a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ -3 & -5 & -\lambda \end{vmatrix} = [(1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 3] - [2(1-\lambda) - 5(1-\lambda)]$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 2).$$

Die Eigenwerte lauten also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$.

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren, also die Lösungen $v^{(i)}$ von $(A - \lambda_i \mathbb{I})v^{(i)} = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Für λ_1 berechnen wir mit dem Gauss-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_3 \text{ ist frei, } 2x_2 = -x_3,\ x_1 = -x_2.$$

Mit der Wahl $x_3 = 2$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ähnlich findet man $v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(3)} = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Matrix A ist diagonalisierbar, da jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit 1 hat.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir sehen direkt aus Teil a), dass $\{v^{(1)}\}$ eine Basis von Kern(F) ist. Es folgt daraus, dass $\dim \mathrm{Bild}(F) = 2$ ist. Jede Auswahl zweier linear unabhängiger Spalten von A, zB.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

gibt deshalb eine Basis von Bild(F).

c) Die j-te Spalte der Matrix T entspricht dem Koordinatenvektor von b_j bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$. Das heisst:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse T^{-1} lässt sich auf verschiedene Arten berechnen; wir wenden das Gauss-Jordan-Verfahren an:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{=(T|I_3)} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{=(I_3|T^{-1})}$$

Also:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Man bemerke, dass

$$[F]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[F]_{\mathcal{E}}T = T^{-1}AT.$$

Nach Berechnung mit den oben gefundenen T und T^{-1} erhält man

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 17 & -2 & 9 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

22. [10 Punkte] Gegeben sei der Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \tag{1}$$

sowie die Polynome $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2 + x^3$ und $p_3(x) = x^3 - x^2 + 2$ aus $\mathcal{P}_3$.

a) **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass der Ausdruck (1) tatsächlich ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_3$ definiert.

b) **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass p_1, p_2 und p_3 linear unabhängig sind.

c) **[4 Punkte]** Sei $V := \text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf der Basis $\mathcal{B} := \{p_1, p_2, p_3\}$ **in der gegebenen Reihenfolge** an, um eine Orthonormalbasis $\hat{\mathcal{B}}$ von V zu erhalten.

d) **[2 Punkte]** Vervollständigen Sie $\hat{\mathcal{B}}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_3$.

Erklärung:

a) Ein Skalarprodukt muss bilinear, symmetrisch und positiv definit sein; wir überprüfen diese drei Eigenschaften. Seien p, q und r Polynome in $\mathcal{P}_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Bilinearität*: Dank der Symmetrie (siehe unten) müssen wir nur die Linearität in der ersten Variablen überprüfen:

$$\begin{aligned}\langle \lambda p + q, r\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \big(\lambda p(x) + q(x)\big) r(x)dx \\ &= \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} p(x)r(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} q(x)r(x)dx = \lambda\langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle.\end{aligned}$$

- *Symmetrie*: Die Symmetrie folgt direkt aus

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} q(x)p(x)dx.$$

- *Positivdefinitheit:* Es gilt

$$\langle p, p\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)^2 dx.$$

  Da $p(x)^2 \geq 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ ist, musst das Integral auch grösser oder gleich 0 sein. Zudem ist $\langle p, p\rangle = 0$ genau dann, wenn $p(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Da jedes nicht konstante Polynom nur endlich viele Nullstellen hat, folgt aus $\langle p, p\rangle = 0$, dass $p(x)$ das Nullpolynom ist.

b) Sei

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = \lambda_1 x^3 + \lambda_2(x^2 + x^3) + \lambda_3(x^3 - x^2 + 2) = 0$$

für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^3 + (\lambda_2 - \lambda_3)x^2 + 2\lambda_3 = 0,$$

mit Koeffizientenvergleich also

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der dritten Gleichung ist $\lambda_3 = 0$. Dann implizieren die erste und zweite Gleichung, dass $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3) = 0$ sind. Darum sind p_1, p_2, p_3 linear unabhängig.

Variante: Zeigen, dass die Koordinaten von p_1, p_2, p_3 bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ linear unabhängig sind (Rangbestimmung mit Gauss-Verfahren).

c) Zuerst normieren wir p_1, um den ersten Vektor $\hat{p}_1$ unserer Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten:

$$\hat{p}_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^6 dx\Big)^{-\frac{1}{2}} x^3 = \sqrt{7}x^3.$$

Nach Gram-Schmidt ergibt $p_2' = p_2 - \langle p_2, \hat{p}_1\rangle \hat{p}_1$ einen Vektor, dessen Normalisierung $\hat{p}_2$ der zweite Vektor der ONB ist:

$$p_2' = x^2 + x^3 - \Big(\frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^5 + x^6 dx\Big)x^3 = x^2 + x^3 - x^3 = x^2$$

$$\Rightarrow \hat{p}_2 = \frac{p_2'}{\|p_2'\|} = \Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx\Big)^{-\frac{1}{2}} x^2 = \sqrt{5}x^2.$$

Mit analoger Notation führen wir Gram-Schmidt weiter durch, um den dritten Vektor $\hat{p}_3$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} p_3' &= p_3 - \langle p_3, \hat{p}_1\rangle \hat{p}_1 - \langle p_3, \hat{p}_2\rangle \hat{p}_2 \\ &= x^3 - x^2 + 2 - \Big(\frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^6 - x^5 + 2x^3 dx\Big)x^3 - \Big(\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^5 - x^4 + 2x^2 dx\Big)x^2 \\ &= x^3 - x^2 + 2 - x^3 - \frac{7}{3}x^2 = 2 - \frac{10}{3}x^2 \\ \Rightarrow \hat{p}_3 &= \frac{p_3'}{\|p_3'\|} = \Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2 - \frac{10}{3}x^2)^2 dx\Big)^{-\frac{1}{2}}(2 - \frac{10}{3}x^2) = \frac{3}{4}(2 - \frac{10}{3}x^2) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}x^2. \end{aligned}$$

d) In der Teilaufgabe b) hat es sich gezeigt, dass die Dimension von V gleich 3 ist; wir wissen ausserdem, dass $\dim \mathcal{P}_3 = 4$ ist. Das heisst, um $\hat{\mathcal{B}}$ zu einer Basis von $\mathcal{P}_3$ zu ergänzen, muss man nur einen Vektor in $\mathcal{P}_3 \setminus V$ auswählen und das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden. Sei $p_4(x) := x$. Da der Koeffizient von x in p_1, p_2 und p_3 gleich 0 ist, ist klar, dass $p_4 \in \mathcal{P}_3 \setminus V$ ist. Mit analoger Notation wie in der Lösung zur Teilaufgabe c) haben wir:

$$p_4' = p_4 - \langle p_4, \hat{p}_1\rangle \hat{p}_1 - \langle p_4, \hat{p}_2\rangle \hat{p}_2 - \langle p_4, \hat{p}_3\rangle \hat{p}_3.$$

Bitte wenden!

Da x^3 und x ungerade Funktionen sind, gelten $\langle p_4, \hat{p}_2 \rangle = 0$ und $\langle p_4, \hat{p}_3 \rangle = 0$. Wir berechnen

$$p_4' = x - \Big(\frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx\Big)x^3 = x - \frac{7}{5}x^3.$$

$$\Rightarrow \hat{p}_4 = \frac{p_4'}{\|p_4'\|} = \Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x - \frac{7}{5}x^3)^2 dx\Big)^{-\frac{1}{2}}(x - \frac{7}{5}x^3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}(x - \frac{7}{5}x^3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}x - \frac{7\sqrt{3}}{2}x^3.$$

Siehe nächstes Blatt!

23. [**10 Punkte**] Gegeben sei die quadratische Form

$$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto q(x) = -x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + (4\sqrt{2})x_1x_3.$$

a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, sodass $q(x) = x^\top Ax$ ist.

b) [**4 Punkte**] Eine Quadrik Q ist gegeben durch die Gleichung $q(x) = 9$. Bringen Sie die Quadrik durch eine Hauptachsentransformation $x = Ty$ auf Normalform, und geben Sie dabei auch T explizit an.

c) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie, welche der Hauptachsen die Quadrik Q nicht schneidet, und begründen Sie Ihre Antwort.

Erklärung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir müssen A diagonalsieren. Erstens finden wir die Eigenwerte von A.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 8(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 8] \\
&= (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3).
\end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind die gesuchten Eigenwerte (EW): $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$. Die entsprechenden Eigenräume/Eigenvektoren sind:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \operatorname{Span}\{(0,1,0)^\top\} \\
E_3 &= \operatorname{Span}\{(\sqrt{2},0,2)^\top\} \\
E_{-3} &= \operatorname{Span}\{(-\sqrt{2},0,1)^\top\}
\end{aligned}$$

Nun ordnen wir die Eigenvektoren in den Matrizen T und D an (wobei wir für T die Spalten nur noch zu normieren brauchen) und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Weiter: Es gilt $D = T^\top AT$ und als Normalform von q bekommen wir

$$9 = q(x) = q(Ty) = (Ty)^\top A(Ty) = y^\top T^\top ATy = y^\top Dy = y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2,$$

was man aber auch direkt hinschreiben darf, da sich die Normalform sofort aus den Eigenwerten ablesen lässt.

Bitte wenden!

c) Die Hauptachse zum negativen Eigenwert schneidet $\{x \mid q(x) = 9\}$ nicht. Die anderen beiden schon. Beweis: Die Achse zum EW -3 ist der Eigenraum E_{-3}. Für jeden Vektor v auf dieser Achse gilt natürlich $Av = -3v$ und somit

$$q(v) = v^T Av = v^T(-3v) = -3v^\top v = -3v^\top v = -3||v||^2 \leq 0.$$

Insbesondere ist $q(v)$ nie gleich 9 und die Achse scheidet $\{x \mid q(x) = 9\}$ nicht.

Für die anderen zwei Hauptachsen bekommt man $q(x) = x^\top Ax = \lambda||x||^2$, wobei $x \in E_\lambda$, $\lambda = 1, 3$. In beiden Fällen gilt: Ist $x \in E_\lambda$ derart dass $||x||^2 = \frac{9}{\lambda}$, so folgt $x \in Q$.

NB: Man könnte die Lösung auch mit den y-Koordinaten formulieren. In diesem Fall sind die drei Hauptachsen die gewöhnliche Koordinatenachsen gegeben durch den Span von den Vektoren $(1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top$ und $(0, 0, 1)^\top$.