

Serie 14: Ferienserie

Die Lösungen werden am 02. März hochgeladen.

1. Finden Sie ein Erzeugendensystem des Lösungsraums $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des Systems

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

2. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}, \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 = x_4\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

- a) U ,
- b) V ,
- c) $U \cap V$.

3. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die Vektoren im \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. & \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ \text{c)} \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. & \text{d)} \quad & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Es seien

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

mit $\binom{x}{0} := 1$ die Binomialpolynome.

- a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ im Vektorraum aller Polynome linear unabhängig ist.
- b) P_2 bezeichne den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Zeigen Sie, dass $P_2 = \text{span}\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$.
- c) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ so, dass

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2}$$

gilt, wenn

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Aufgabe c) kann entweder durch direkte Rechnung gelöst werden oder mit Hilfe der diskreten Taylor-Formel, welche für ein Polynom p vom Grad n besagt, dass

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k p(0) \binom{x}{k},$$

wobei $\Delta^0 p(x) := p(x)$, $\Delta^1 p(x) := p(x+1) - p(x)$ und $\Delta^k p(x) := \Delta^1(\Delta^{k-1} p(x))$ die diskreten Differenzenoperatoren sind.

5.

- a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaußverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für \mathbb{R}^3 (Begründung).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

6. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$ für \mathbb{R}^3 , wobei

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Betrachten Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten y_1, y_2, y_3 , die x in der Basis \mathcal{B} beschreiben, d.h.

$$x = y_1 b^{(1)} + y_2 b^{(2)} + y_3 b^{(3)}.$$

b) Sei nun der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, beschrieben durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ in der Basis \mathcal{B} . Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$.

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A .

b) Ermitteln Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum von \mathbb{R}^4 . Bestimmen Sie die Koordinaten der Spaltenvektoren in dieser Basis.

8. Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5 \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V .

9.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix eine Inverse?

10. Gegeben sei ein Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α :

$$\begin{aligned} (2 - \alpha)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_2 - (2 - \alpha)x_3 &= -4 \\ (3 - \alpha)x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α , für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

11. Für welche reellen Werte von s und t hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + sy + s^2z &= 1 \\ s^2x + y + 2tz &= 1 \\ sx + s^2y + z &= t \end{aligned}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

12. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

13. Welche Beziehungen zwischen b_1, b_2, \dots, b_5 müssen erfüllt sein, damit das folgende System lösbar ist?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_2 + 2x_3 &= b_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b_4 \\ x_1 + x_3 &= b_5 \end{aligned}$$

14. Auf einem geschlossenen Metalldraht werden an 4 Punkten die Temperaturen x_1, x_2, x_3, x_4 gemessen. Dabei ist die Temperatur in einem der Punkte jeweils gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der beiden benachbarten Punkte.

- a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, x_4 auf.
- b) Bestimmen sie die Lösungsmenge davon.

15. Geben Sie für s und t Bedingungen an, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccccc} x_1 & + & sx_2 & & & = & 2 \\ & & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & sx_3 & = & t \end{array}$$

- a) keine Lösung,
 - b) genau eine Lösung,
 - c) unendlich viele Lösungen
- besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

16. Der sogenannte **Massenausgleich zweiter Ordnung** (Link zu Animationen) einer k -Zylindermaschine liefert für die Impulse (I_1) , (I_2) und die Momente (M_1) , (M_2) der ersten und zweiten Ordnung folgende Bedingungen:

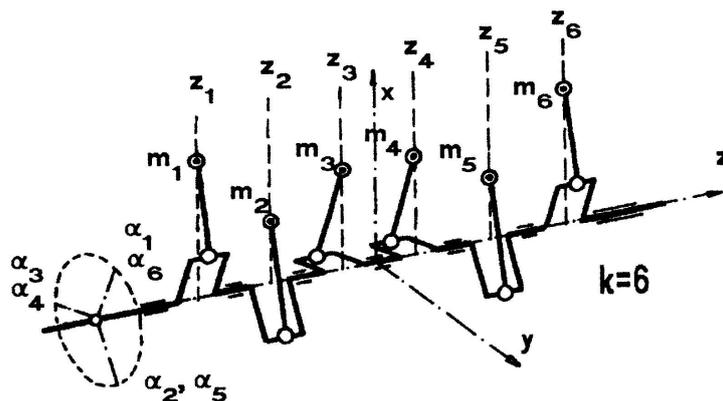
$$\sum_{i=1}^k m_i \sin \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i \cos \alpha_i = 0 \quad (I_1)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i \sin 2\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i \cos 2\alpha_i = 0 \quad (I_2)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i z_i \sin \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos \alpha_i = 0 \quad (M_1)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i z_i \sin 2\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos 2\alpha_i = 0 \quad (M_2)$$

Dabei bezeichnen α_i die Kurbelwinkel und $m_i > 0$ die Massen. Wir nehmen weiter an, dass der Massenschwerpunkt in $z = 0$ liegt, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und dass $k > 1$.



- a) Wie lautet die Matrix A des homogenen linearen Gleichungssystems, das die Vektoren $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)^T$ und $\vec{M} = (z_1 m_1, \dots, z_k m_k)^T$ erfüllen müssen? Warum ist \vec{M} nie ein Vielfaches von \vec{m} ? Welchen Rang darf A bei Massenausgleich höchstens haben?
- b) Bestimmen Sie A und $\text{Rang}(A)$ und lösen Sie $Ax = 0$ für die zwei Fälle:
- 4-Zylinder mit Zündfolge 1-3-4-2, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ$.
 - 6-Zylinder mit Zündfolge 1-5-3-6-2-4, $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120^\circ$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 240^\circ$.

Ist in beiden Fällen Massenausgleich möglich?

- c) Gibt es für den üblichen Aufbau einer 4-Zylindermaschine

$$m_1 = \dots = m_4 = m, \quad z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$$

Kurbelwinkel α_i , so dass Massenausgleich zweiter Ordnung vorliegt?