Lösungen Serie 5

1. Die Abbildung $V^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.

√ (a) richtig

(b) falsch

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und seien x, $y \in V$ mit

$$\begin{aligned} x &= x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n, \\ y &= y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$x + y = (x_1 + y_1)b_1 + \cdots + (x_n + y_n)b_n$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1)b_1 + \cdots + (\lambda x_n)b_n.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} [x+y]_{\mathcal{B}} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^\top = (x_1, \ldots, x_n)^\top + (y_1, \ldots, y_n)^\top \\ &= [x]_{\mathcal{B}} + [y]_{\mathcal{B}}, \\ [\lambda x]_{\mathcal{B}} &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^\top = \lambda (x_1, \ldots, x_n)^\top = \lambda [x]_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

die Abbildung $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ ist also linear.

2. Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im $\mathbb{R}^3$ ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \langle x, e_1 \rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Für die Bilder der Standardbasisvektoren unter $\mathcal{F}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e_1) &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 = e_1, \\ \mathcal{F}(e_2) &= \langle e_2, e_1 \rangle e_2 = 0, \\ \mathcal{F}(e_3) &= \langle e_3, e_1 \rangle e_3 = 0. \end{aligned}$$

Da in den Spalten der Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren stehen, ist $\mathcal{F}$ in der Tat durch diese Darstellungsmatrix gegeben.

3. Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von $\mathcal{F}$ liegt.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Der Kern von $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}^3$ enthalten und das Bild von F ist in $\mathbb{R}$ enthalten. Da es keine Vektoren gibt, die gleichzeitig im $\mathbb{R}^3$ und in $\mathbb{R}$ liegen, existieren keine Vektoren, die gleichzeitig im Kern und im Bild von F liegen.

4. Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^\top y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Wir nehmen an, dass A eine $m \times n$-Matrix ist. Man beachte, dass Bild(A) der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^m$ ist. Somit liegt die gegebene Linearkombination x von Spalten von A in Bild(A). Weiter liegt die gegebene Lösung y von $A^\top y = 0$ in Kern$(A^\top)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Unterräume Bild(A) und Kern$(A^\top)$ von $\mathbb{R}^m$ bezüglich des Standardskalarprodukts senkrecht aufeinander stehen. Darum stehen x und y bezüglich des Standardskalarprodukts senkrecht aufeinander.

5. Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird bezüglich der Standardbasis durch eine $n \times n$-Matrix A beschrieben, die Abbildung $\mathcal{F}$ ist also gegeben durch $x \mapsto Ax$. Falls der Kern von $\mathcal{F}$ nur aus dem Nullvektor besteht, hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Das ist äquivalent dazu, dass die Matrix A invertierbar ist und daher ist $\mathcal{F}$ invertierbar.

6. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für Kern A und Bild A.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Kern}\, A &= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}, \\ \text{Bild}\, A &= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^4, \text{ so dass } y = Ax\} \end{aligned}$$

Aus dem Buch von Nipp/Stoffer, Anfang Kapitel 6, wissen wir, dass für eine $m \times n$-Matrix A gilt:

(i) $\dim(\text{Bild}\, A) + \dim(\text{Kern}\, A) = r + (n - r) = n$, wobei $r = \text{Rang}\, A$.

(ii) $\text{Bild}\, A = \text{span}\left\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\right\}$, wobei $a^{(i)}$ die i-te Spalte von A bezeichnet.

Wir lösen also zunächst $Ax = 0$ mit Gausselimination:

$$\begin{array}{|rrrr|r|} \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{|rrrr|r|} \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Man wähle $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_3 = \beta \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich

$$2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha)$$

und somit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Kern A.

Aus (i) folgt $\dim(\text{Bild}\, A) = 4 - \dim(\text{Kern}\, A) = 2$. Wegen (ii) müssen wir also 2 linear unabhängige Spaltenvektoren von A auswählen. Aus dem obigen Gauss-Schema sieht man, dass z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von Bild A.

7. Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

a) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschrieben?

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} A$ und $\dim(\operatorname{Bild} A)$.

Lösung:

a) Betrachte die Standardbasis e_1, e_2, e_3. Der Vektor e_1 steht senkrecht zu E. Die Abbildung $\mathcal{F}$ projiziert e_1 also auf $0 \in E$:

$$\mathcal{F}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: a^{(1)}.$$

Da e_2 und e_3 bereits in E liegen, folgt:

$$\mathcal{F}(e_2) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: a^{(2)},$$

$$\mathcal{F}(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: a^{(3)}.$$

Es folgt

$$A = (a^{(1} \; a^{(2)} \; a^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\operatorname{Kern} A$ ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$, besteht also aus allen Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $x_2 = x_3 = 0$. Somit ist

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und es folgt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$.

c) Es gilt $\operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$. Da $a^{(1)} = 0$ ist und $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ offensichtlich linear unabhängig sind, folgt

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{a^{(2)}, a^{(3)}\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = E.$$

und $\dim(\operatorname{Bild} A) = 2$.

8. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = (2-x)\,P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

$\mathcal{F}$ ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2-x)\,P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis 1, x, x^2 von $\mathcal{P}_2$ beschrieben?

Lösung:

a) Seien $P(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}_2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(P(x)+Q(x)) &= (2-x)\,(P(x)+Q(x))' = (2-x)\,(P'(x)+Q'(x)) \\
&= (2-x)\,P'(x) + (2-x)\,Q'(x) = \mathcal{F}(P(x)) + \mathcal{F}(Q(x)), \\
\mathcal{F}(\alpha\,P(x)) &= (2-x)\,(\alpha\,P(x))' = \alpha(2-x)\,P'(x) = \alpha\,\mathcal{F}(P(x)).
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{F}$ linear.

b) Wir betrachten die Basis $b^{(1)} = 1$, $b^{(2)} = x$, $b^{(3)} = x^2$ von $\mathcal{P}_2$. Wir suchen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass

$$\mathcal{F}(b^{(j)}) = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\,b^{(k)}, \quad j = 1,2,3.$$

In Koordinaten:

$$\mathcal{F}\left(b^{(1)}\right) = \mathcal{F}(1) = (2-x)\cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}\left(b^{(2)}\right) = \mathcal{F}(x) = (2-x)\cdot 1 = 2-x \;\Rightarrow\; a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}\left(b^{(3)}\right) = \mathcal{F}(x^2) = (2-x)\cdot 2x = 4x - 2x^2 \;\Rightarrow\; a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$