

## Lösungen Serie 6

---

1. Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  so, dass  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

- ✓ (a)  $\dim(\text{Bild } A) = n$
- (b)  $\dim(\text{Bild } A) = 1$
- ✓ (c)  $\dim(\text{Kern } A) = 0$
- (d)  $\dim(\text{Kern } A) = 1$

Der Kern von  $A$  ist genau die Lösungsmenge des Gleichungssystems  $Ax = 0$ . Da  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung hat, gilt darum  $\dim(\text{Kern } A) = 0$ . Weiter gilt nach der in der Vorlesung behandelten Dimensionsformel

$$\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n.$$

Daher gilt  $\dim(\text{Bild } A) = n$ .

2. Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren ...

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

✓ (e)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Wir bringen die gegebene Matrix  $A$  mit dem Gaussverfahren in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher hat das Bild von  $A$  die Dimension 2 und die beiden ersten Spalten

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis von Bild  $A$ .

Somit ist die fünfte Antwort richtig und alle Vektoren im Bild von  $A$  sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind nicht von dieser Form ( $\lambda_1$

müsste für beide Vektoren gleich 1 sein und es gibt kein passendes  $\lambda_2$ ). Sie liegen daher nicht im Bild von  $A$  und die erste und vierte Antwort sind falsch.

Die zweite und dritte Antwort sind auch falsch, weil Vektoren im  $\mathbb{R}^4$  nicht im Bild von  $A$  liegen.

3. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

- ✓ (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .
- (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .
- (c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .
- (d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .
- (e)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ .

Oben haben wir die gegebene Matrix  $A$  mit dem Gaussverfahren in die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht. Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems  $Ax = 0$  durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4 \\ x_1 &= \frac{1}{2}((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4) = x_3 \end{aligned}$$

gegeben, wobei  $x_3$  und  $x_4$  freie Parameter sind. Der Kern von  $A$  hat somit die Dimension 2.

Die Vektoren  $(1, -1, 1, 0)^\top$ ,  $(1, -3, 1, 1)^\top$  sind Lösungen von  $Ax = 0$  und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von  $A$ .

Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von  $A$  zwei Elemente hat.

Die dritte und fünfte Antwort sind falsch, weil Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  nicht im Kern von  $A$  liegen.

Die vierte Antwort ist falsch, weil  $(1, 0, -1, 0)^\top$  keine Lösung von  $Ax = 0$  ist.

4. Ein Vektor habe bezüglich der Basis  $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$  die Koordinaten  $(-1, -1)$ . Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

- (a)  $(\frac{1}{2}, 0)$
- (b)  $(-1, -1)$
- (c)  $(0, -2)$
- ✓ (d)  $(2, 0)$
- (e)  $(1, 1)$

Da der gegebene Vektor  $v$  bezüglich der Basis  $B$  die Koordinaten  $(-1, 1)$  hat, gilt

$$v = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher sind  $(2, 0)$  die Koordinaten von  $v$  bezüglich der Standardbasis.

5. Seien  $A$  und  $B$  Darstellungsmatrizen einer Funktion  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\det A = \det B$ .

- ✓ (a) Richtig
- (b) Falsch

$A$  und  $B$  sind ähnlich, d.h.  $B = TAT^{-1}$  für eine reguläre Matrix  $T$  (nämlich die Übergangsmatrix). Daher gilt  $\det B = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A (\det T)^{-1} = \det A$ .

6. Gegeben sei der Vektorraum  $V^3 = \mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis  $\mathcal{B}$ . Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von  $V^3$  nach  $V^3$ .

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix  $T$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$ .

b) Durch welche Matrix  $B$  wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

**Lösung:**

a) Die Übergangsmatrix von  $\mathcal{B}'$  nach  $\mathcal{B}$  ist durch

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben, weil deren Spalten aus den Koordinatenvektoren der neuen Basisvektoren bezüglich der Standardbasis bestehen. Die gesuchte Übergangsmatrix  $T$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$  ist invers zu  $S$ . Wir invertieren darum  $S$  mit dem Gaußverfahren:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- b) Nach der Formel aus der Vorlesung gilt  $B = TAT^{-1} = TAS$ . Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- c) Wir bezeichnen die Basisvektoren aus  $\mathcal{B}'$  mit  $b'_1$ ,  $b'_2$  und  $b'_3$ . Nach Aufgabenteil b) wird  $b'_1$  auf  $-b'_1$  und  $b'_2$  auf  $-b'_2$ , sowie  $b'_3$  auf 0 abgebildet. Somit handelt es sich um die Projektion entlang  $b'_3$  auf die Ebene, die durch  $b'_1$  und  $b'_2$  aufgespannt wird, gefolgt von einer Punktspiegelung am Nullpunkt.

*Bemerkung:* Weil  $b'_3$  senkrecht auf  $b'_1$  und  $b'_2$  steht, ist die obige Projektion entlang  $b'_3$  die Orthogonalprojektion auf die Ebene, die durch  $b'_1$  und  $b'_2$  aufgespannt wird (bezüglich des Standardskalarprodukts).

7. Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme  $Ax = b_i$ ,  $i = 1, 2$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

**Lösung:** Die Fredholm-Alternative besagt: *Ein Gleichungssystem  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn  $b$  senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten Gleichungssystems  $A^\top y = 0$  steht.*

Da das Standardskalarprodukt linear in beiden Argumenten ist, ist dies genau dann erfüllt, wenn  $b$  senkrecht auf den Vektoren einer Basis des Lösungsraums von  $A^\top y = 0$  steht.

Wir bestimmen daher eine Basis des Lösungsraums von  $A^\top y = 0$  mit dem Gaußverfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen erfüllen also  $y_2 = 2y_3$  und  $y_1 = -2y_2 + y_3 - y_4 = -3y_3 - y_4$ , wobei  $y_3$  und  $y_4$  freie Parameter sind. Eine mögliche Basis des Lösungsraums ist damit gegeben durch die Vektoren

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit finden wir:

- $Ax = b_1$  hat eine Lösung, da  $\langle b_1, c^{(1)} \rangle = \langle b_1, c^{(2)} \rangle = 0$ .
- $Ax = b_2$  hat keine Lösung, da  $\langle b_2, c^{(1)} \rangle = -2 \neq 0$ .

**8. Darstellung eines vierdimensionalen Würfels:**

Sei  $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$  der Einheitswürfel in  $\mathbb{R}^4$ . Wir betrachten die Projektionen  $P_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  entlang von  $(1, 1, 1, -2)^\top$  auf den Unterraum mit  $x_4 = 0$  und  $P_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  entlang von  $(2, 1, -4, 0)^\top$  auf den Unterraum mit  $x_3 = 0$ , sowie die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top.$$

- Man bestimme die Darstellungsmatrizen von  $P_1, P_2$  und  $E$ .
- Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen  $P_2 \circ P_1$  und  $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$ .
- Man skizziere das Bild der Kanten von  $W$  unter  $\phi$ .

**Lösung:**

- Wir bezeichnen die Vektoren der Standardbasis von  $\mathbb{R}^4$  mit  $e_1, e_2, e_3$  und  $e_4$ .
  - Da  $e_1, e_2$  und  $e_3$  im Unterraum mit  $x_4 = 0$  liegen, gilt  $P_1(e_1) = e_1, P_1(e_2) = e_2$  und  $P_1(e_3) = e_3$ . Weiter haben wir

$$P_1(e_4) = e_4 + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn bei einer Projektion wird ein Punkt/Vektor (hier  $e_4$ ) soweit entlang der Projektionsrichtung (hier  $(1, 1, 1, -2)^\top$ ) verschoben, bis er im Unterraum (hier  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$ ) liegt, auf welchen projiziert wird. Konkret liefert dies in unserem Fall das Gleichungssystem

$$e_4 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die 4. Komponente liefert also  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Somit ist die Darstellungsmatrix von  $P_1$  (bezüglich der Standardbasis) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Da  $e_1, e_2$  und  $e_4$  im Unterraum mit  $x_3 = 0$  liegen, gilt  $P_2(e_1) = e_1, P_2(e_2) = e_2$  und  $P_2(e_4) = e_4$ . Weiter haben wir

$$P_2(e_3) = e_3 + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Somit ist die Darstellungsmatrix von  $P_2$  (bezüglich der Standardbasis) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Es gilt  $E(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $E(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , sowie  $E(e_3) = E(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Somit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix von  $E$ , bezüglich der Standardbasen von  $\mathbb{R}^4$  resp.  $\mathbb{R}^2$ .

- b) • Die Darstellungsmatrix von  $P_2 \circ P_1$  ist das Produkt der Darstellungsmatrizen von  $P_2$  und  $P_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Die Darstellungsmatrix von  $\phi$  ist das Produkt der Darstellungsmatrizen von  $E$  und  $P_2 \circ P_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

- c) Für die Darstellung der Kanten des vierdimensionalen Würfels berechnen wir die Bilder der 16 Ecken  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$  mit  $x_i \in \{0, 1\}$  unter  $\phi$ :

$$\begin{array}{ll} \phi((0, 0, 0, 0)^\top) = (0, 0)^\top & \phi((0, 0, 0, 1)^\top) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 0, 0, 0)^\top) = (1, 0)^\top & \phi((1, 0, 0, 1)^\top) = \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{8}\right)^\top \\ \phi((0, 1, 0, 0)^\top) = (0, 1)^\top & \phi((0, 1, 0, 1)^\top) = \left(\frac{3}{4}, \frac{13}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 1, 0, 0)^\top) = (1, 1)^\top & \phi((1, 1, 0, 1)^\top) = \left(\frac{7}{4}, \frac{13}{8}\right)^\top \\ \phi((0, 0, 1, 0)^\top) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top & \phi((0, 0, 1, 1)^\top) = \left(\frac{5}{4}, \frac{7}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 0, 1, 0)^\top) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top & \phi((1, 0, 1, 1)^\top) = \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{8}\right)^\top \\ \phi((0, 1, 1, 0)^\top) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)^\top & \phi((0, 1, 1, 1)^\top) = \left(\frac{5}{4}, \frac{15}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 1, 1, 0)^\top) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)^\top & \phi((1, 1, 1, 1)^\top) = \left(\frac{9}{4}, \frac{15}{8}\right)^\top \end{array}$$

(Linearität ausnutzen! z.B. sind die Werte 5 – 8 der ersten Spalte gleich den ersten 4 Werten verschoben/addiert um  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^\top$ ). Die Kanten verbinden die Ecken, die sich nur in einer der vier Koordinaten unterscheiden. Dies ergibt folgendes Bild:

